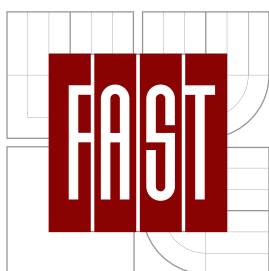


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

POROVNÁNÍ OMEZOVAČŮ LOKALIZACE

COMPARISON OF LOCALIZATION LIMITERS FOR STRAIN - SOFTENING

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Josef KVĚTOŇ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. Jan ELIÁŠ, Ph.D.

BRNO 2013



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	B3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Bakalářský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3647R013 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student	Josef Květoň
Název	Porovnání omezovačů lokalizace
Vedoucí bakalářské práce	Ing. Jan Eliáš, Ph.D.
Datum zadání bakalářské práce	30. 11. 2012
Datum odevzdání bakalářské práce	24. 5. 2013
V Brně dne 30. 11. 2012	

.....
prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
Vedoucí ústavu

.....
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc.
Děkan Fakulty stavební VUT

Podklady a literatura

Jirásek, M. a Zemna, J. Přetváření a porušování materiálů, ČVUT, 2010.

Bažant, Z.P. a Planas, J. Fracture and size effect in concrete and other Quasibrittle materials, CRC press, 1998.

Jiráek, M. Nonlocal models for damage and fracture: comparison of approaches, Int. J. of Solids and Structures, 1998.

Jirásek, M. a Bauer, M. Numerical aspects of the crack band approach, Computers & Structures, 2012.

Zásady pro vypracování

Student porovná základní typy omezovačů lokalizace (model pásu trhlin, nelokální model) na modelu třibodového ohybu betonového trámce se zářezem i bez zářezu. Pro jejich srovnání bude uvažovat různou hustotu dělení sítě konečných prvků a také různou orientaci.

Předepsané přílohy

.....

Ing. Jan Eliáš, Ph.D.
Vedoucí bakalářské práce

Abstrakt

Předkládaná práce porovnává dva přístupy k zajištění konstantního uvolňování energie při šíření trhliny v konečněprvkostním modelu. Je totiž prokázáno, že výsledky modelů jsou závislé na hustotě sítě konečných prvků. Následující dva přístupy takovou závislost eliminují odlišným způsobem. Model pásu trhlin (crack band model) upravuje poměrné přetvoření v konstitutivních zákonech prvků v závislosti na lomové energii. V nelokálním modelu se konstitutivní zákony neupravují, ale poškození v integračních bodech nejsou závislé pouze na poměrných přetvořeních v daném integračním bodě, ale také na poměrných přetvořeních v integračních bodech v okolí. Tyto přístupy jsou aplikovány na model tříbodového ohybu na různých sítích konečných prvků. Různost sítí spočívá nejen v rozdílných rozměrech konečných prvků, ale také v jejich uklonění. Přístupy jsou na nich vzájemně porovnány.

Klíčová slova

kvazikřehké materiály; lokalizace; model pásu trhlin; nelokální model; lomová energie; tahové změkčení; MKP.

Abstract

It is well known, that simulation of crack propagation using the finite element method is dependent on mesh discretization. The thesis compares two approaches, that are designed to reduce the mesh influence: (I) the crack band model and (II) the nonlocal model. These localization limiters are applied to simulate three-point-bent beam with and without notch. The model of the beam is made with several variants of mesh discretization differing in finite element size and inclination. Performance of both localization limiters is discussed.

Key words

quasi-brittle materials; localization; crack band model; nonlocal model; fracture energy; strain softening; FEM.

Bibliografická citace

KVĚTOŇ, Josef. *Porovnání omezovačů lokalizace*. Brno, 2013. 44 s. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce Ing. Jan Eliáš, Ph.D.

Ústav stavební mechaniky
Fakulta stavební
Vysoké učení technické v Brně
Česká Republika

Typeset by L^AT_EX 2_ε

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně, pod vedením Ing. Jana Eliáše, Ph.D., a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně, dne

.....
Josef Květoň

Poděkování

Chci zde poděkovat nejprve vedoucímu této méj bakalářské práce Ing. Janu Eliášovi, Ph.D. Moje poděkování mu patří zejména pro jeho otevřený a přátelský postoj ke mě, ať už se to týká věcí odborných, či osobních. Jeho cenné rady nejen během této práce pro mne byly vždy přínosem.

Dále bych chtěl poděkovat vyučujícím, kteří mi pomohli dostat se až k této závěrečné práci. O to více moje poděkování patří těm, kteří na mě byli, dle mého tehdejšího úsudku až příliš, přísní, protože bez nich bych se mnoho nenaučil.

Také bych zde rád poděkoval Ing. Václavu Sadílkovi, Ph.D., který mi v začátcích této práce poskytl cenné rady týkající se programu Oofem a především skript, bez kterého by zpracování dat bylo velmi obtížné.

V neposlední řadě bych chtěl poděkovat své rodině, která mě během celého studia podporovala a zvláště v závěrečné fázi vypracování této práce trpěla mé občasné náladami.

Obsah

Abstrakt	I
Klíčová slova	I
Poděkování	V
1 Úvod	1
1.1 Předmluva	1
1.2 Stručný obsah práce	2
2 Cíle	3
3 Vlastnosti modelu a geomterie	5
3.1 Použité programy a aplikace	5
3.2 Geometrie modelu	7
3.3 Síť	8
3.4 Materiál	9
4 Jednoduchý model porušení	11
4.1 Kvazikřehké materiály	11
4.2 Model porušení	12
4.3 Lokalizace v 1D	13
4.4 Lokalizace ve 2D	14
5 Model pásu trhlin	17
5.1 Lomová energie	17
5.2 Šířka pásu trhlin	18
5.3 Model pásu trhlin v 1D	19
5.4 Model pásu trhlin ve 2D	20
6 Nelokální model	23
6.1 Obecně	23
6.2 Váhové funkce	24
6.3 Nelokální přístup v 1D	26

6.4	Nelokální přístup ve 2D	26
7	Vzájemné porovnání obou přístupů	29
7.1	Porovnání zatěžovacích křivek	29
7.2	Porovnání tvarů trhliny	32
8	Závěr	37
8.1	Zhodnocení	38
	Literatura	39
	Seznam symbolů	41
	Seznam obrázků	43

Kapitola 1

Úvod

1.1 Předmluva

Požadavky na spolehlivost a zároveň ekonomičnost návrhu konstrukčních prvků jsou důvodem, proč je dnes při výpočtech s úspěchem používána řada počítačových programů. Tento trend není záležitostí několika málo posledních let, ale spíše desetiletí. Vývoj takových programů jde ruku v ruce s pokrokem v oblasti hardwaru. To je dáno výpočtovou náročností řešených úloh. Při zrodu prvního počítače byl takový přístroj velký jako přednáškový sál a dokázal řešit jen několik, z našeho současného pohledu velice jednoduchých, operací. Oproti tomu dnešní stroje disponují mnohdy násobným výpočetním výkonem a to i přes stále se zmenšující rozměry.

Jednou z možností, jak konstrukci či její dílčí prvek navrhnout, je užití výpočtového modelu založeného na metodě konečných prvků. Touto cestou lze získat velice přesné výsledky. Je ale třeba velké opatrnosti při zadávání vstupních dat.

U materiálů s tahovým změkčením dochází s rostoucím přetvořením, po dosažení meze pevnosti, k pozvolnému poklesu napětí. Trhlina se tak lokalizuje do pásu o šířce jednoho konečného prvku. Odezva modelu pak začne být závislá na velikosti a tvaru sítě konečných prvků. Je více způsobů, jak se s tímto nežádoucím jevem vyrovnat. Jako příklad lze uvést model pásu trhlin (Bažant a Oh, 1983), nelokální modely (Jirásek, 1998), nebo gradientní modely (Jirásek a Rolshoven, 2009). Všechny tyto přístupy se snaží o jedno. Zaručit, aby energie, disipovaná při šíření trhliny, nebyla závislá na velikosti či orientaci prvku.

V této práci se zabýváme dvěma z těchto přístupů. *Modelem pásu trhlin*, který v konstitutivních zákonech prvků upravuje poměrné přetvoření v závislosti na lomové energii a *nelokálním modelem*, který uvažuje poškození v integračním bodě závislé nejen na poměrném přetvoření v daném bodě, ale také na poměrných přetvořeních v bodech okolních.

Oba přístupy jsou porovnávány na modelu tříbodového ohybu tělesa se zářezem i bez zářezu. Je vytvořeno více variant sítě konečných prvků. Jejich odlišnost spočívá jak v lišících se velikostech elementů, tak v jejich různém uklonění.

1.2 Stručný obsah práce

- V **kapitole 1** je úvod k práci, stručný popis problematiky, kterou se práce zabývá a zdůvodnění, proč se danou problematikou zabývat.
- V **2. kapitole** jsou uvedeny cíle, kterých chceme v této práci dosáhnout.
- **Kapitola 3** obsahuje informace týkající se geometrie a materiálových vlastností použitého konečnoprvkostního modelu. Mimo to jsou zde uvedeny použité programy a aplikace.
- **4. kapitola** se věnuje izotropnímu modelu poškození. Je zde blíže rozebrán konstitutivní zákon. Dále je v této kapitole vysvětlen pojem lokalizace porušení. Na příkladech je demonstrován vliv lokalizace na výsledky simulací.
- V **kapitole 5** je vysvětlen princip *modelu pásu trhlin*. Tento přístup je zde aplikován na stejnou geometrii jako v kapitole 4. a je zde prokázána jeho účinnost.
- V **6. kapitole** je nahlédnuto na *nelokální model*. Je zde vysvětlen přepočet lokálních hodnot na nelokální pomocí váhové funkce. Nejpoužívanější váhové funkce jsou zde pak vyčísleny a zobrazeny. Tento přístup je následně použit pro výpočet porušení tělesa v tříbodovém ohybu jako v případě předchozích dvou kapitol.
- **Kapitola 7** se pak zabývá vzájemným porovnáním obou omezovačů lokalizace. Porovnány jsou jak zatěžovací křivky, tak průběh trhliny. V této kapitole je také použito zmíněných přístupů k výpočtu modelu s ukloněnou sítí konečných prvků a je pozorováno, zda vykazují závislost na směru sítě.
- V **8. kapitole** je závěr a zhodnocení výsledků této práce.

Kapitola 2

Cíle

- Prvním cílem je vytvořit v programu Oofem model třibodového ohybu včetně smysluplných okrajových podmínek. Model by měl být zhotoven pro různé varianty geometrie sítě konečných prvků, lišících se od sebe různou hustotou sítě a různou orientací prvků.
- Druhým cílem je pak ověřit funkčnost dvou vybraných omezovačů lokalizace - *modelu pásu trhlin* a *nelokálního modelu* - při simulaci porušení s využitím různých variant sítě konečných prvků.

pozn.: Cílem této práce není porovnání výsledků z konečněprvkostního modelu s experimentálními daty naměřenými na reálném zkušebním tělese. Jedná se pouze o vzájemné porovnání uvedených omezovačů lokalizace.

Kapitola 3

Vlastnosti modelu a geomterie

3.1 Použité programy a aplikace

Hlavním výpočtovým programem, pomocí kterého jsou simulace v této práci provedeny, je OOFEM. Jeho název vychází z anglického výrazu "Object Oriented Finite Element Solver", přeloženo do češtiny "objektově orientovaný program pro analýzu metodou konečných prvků" (Patzák a Bittnar, 2001; Patzák a Rypl, 2012). Tento program je vyvíjen na katedře stavební mechaniky stavební fakulty ČVUT od roku 1997. Je volně šiřitelný pod GNU licenci¹. K výpočtům v této práci byla použita verze 2.1 z 22. 12. 2011.

Program Oofem není tak uživatelsky přátelský jako jiné, především komerční, řešiče. Přímé zadávání pomocí oken a rozbalovacích lišt s výběrem možných zadání v tomto programu nenajdete. Všechna vstupní data je nutné vložit pomocí textového souboru (obr. 3.1). Na druhou stranu je program včetně zdrojového kódu volně k dispozici², takže je možné přidávat vlastní funkce, případně modifikovat stávající. Nicméně program Oofem je pouze řešičem, a pro řešení úloh metody konečných prvků jsou nezbytnými další programové součásti běžně nazývané preprocesor a postprocesor. První z nich slouží k tvorbě vstupních dat jako jsou geometrie konstrukce a sítě konečných prvků, okrajové podmínky atd. Postprocesor je na opačném konci výpočtu a slouží k zobrazení, popřípadě vyhodnocení výstupních hodnot (pole napětí, posunutí, atd.).

Jako preprocesor byl použit program Salome, přičemž soubor musel být dále převeden do formátu odpovídajícího vstupnímu souboru pro program Oofem. K převedení slouží skript, který je k dispozici na stránkách Oofemu. V Salome je nejjednodušší cestou použití GUI³, ve kterém jednoduše klikáním myši a zadáváním požadavků (např. velikost prvků v síti, počet prvků na linii apod.) navolíme geometrii sítě konečných prvků. Na obr. 3.2 a 3.3 jsou ukázky z pracovního prostředí programu Salome.

¹GNU GPL - general public license; všeobecná veřejná licence GNU, více na www.gnu.org

²www.oofem.org

³graphical user interface; grafické uživatelské rozhraní

K zpracování výstupních dat pak bylo použito aplikace Paraview⁴. Tento program umožňuje vykreslení všech hodnot z výstupního souboru, ukázka vykreslení je dobře vidět na obr. 3.3.

Další grafické zpracování výpočetních dat (především zatěžovacích diagramů) by nebylo možné bez skriptu poskytnutého Václavem Sadílkem. Skript slouží k exportu dat, příslušejících jednotlivým bodům sítě konečných prvků, protože jejich ruční vypisování by bylo velmi obtížné.

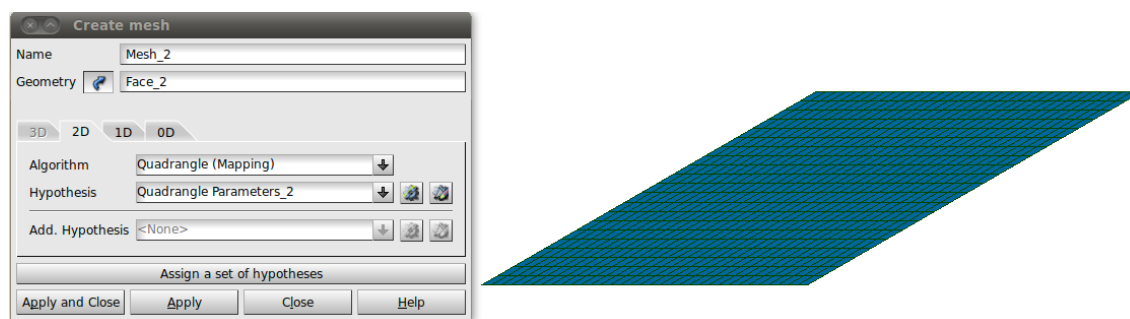
⁴www.paraview.org

```
NonLinearStatic nsteps 40 rtol 0.0001 MaxIter 2000 stiffmode 1 manrmsteps 10 controllmode 1 nmodules 1
vtkxml tstep all domain_all primvars 1 1 vars 3 4 1 13 stype 1
domain 2dPlaneStress
OutputManager tstep all dofman_all element_all
ndofman 1980 nelem 1862 ncrosssect 1 nmat 1 nbc 2 nic 0 nltf 2
node 1      coords 3  6.66134e-16  0      0
node 2      coords 3  5            0      0
node 3      coords 3  10           0      0
node 4      coords 3  15           0      0
node 5      coords 3  20           0      0      bc 2 0 1
node 6      coords 3  20           4.76143 0
node 7      coords 3  20           9.52286 0
node 8      coords 3  20           14.2843 0
```

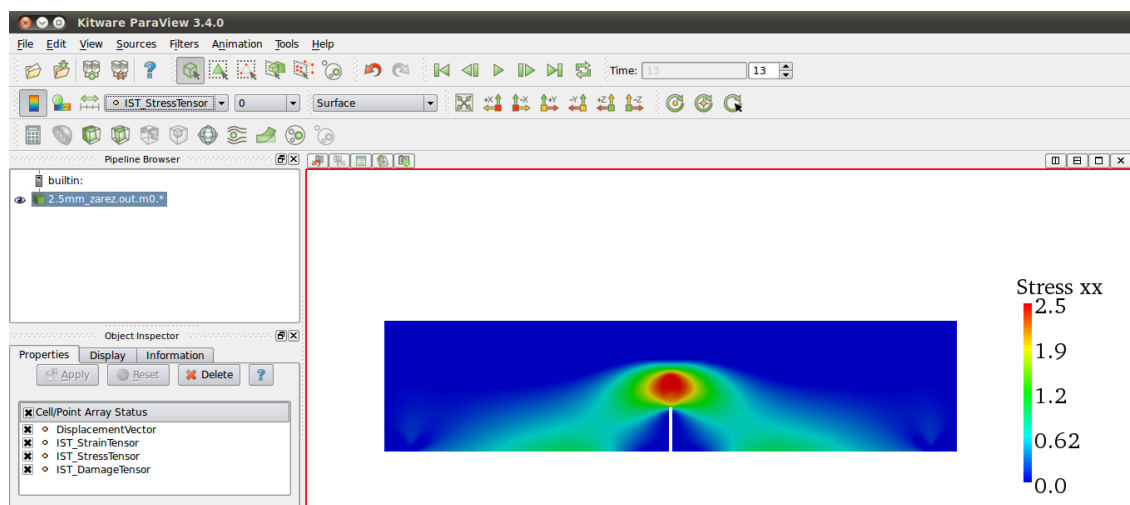
Obrázek 3.1: Ukázka části vstupního souboru Oofemu.



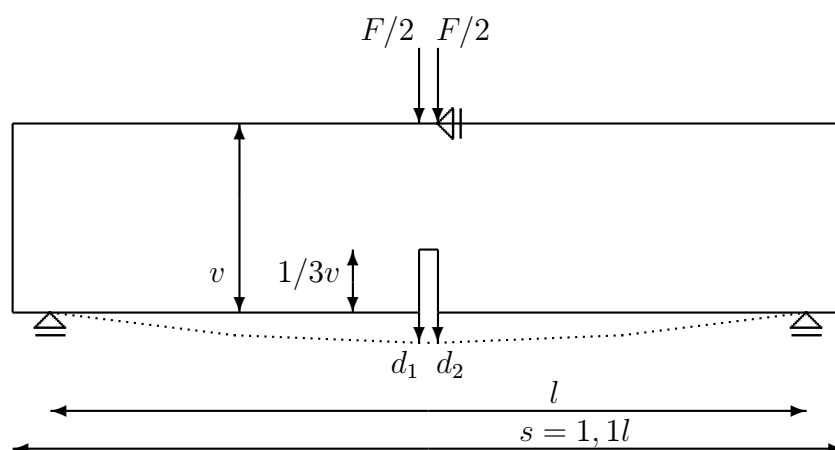
Obrázek 3.2: Ukázka zadávání geometrie v Salome.



Obrázek 3.3: Ukázka zadávání parametrů k vytvoření sítě konečných prvků v Salome.



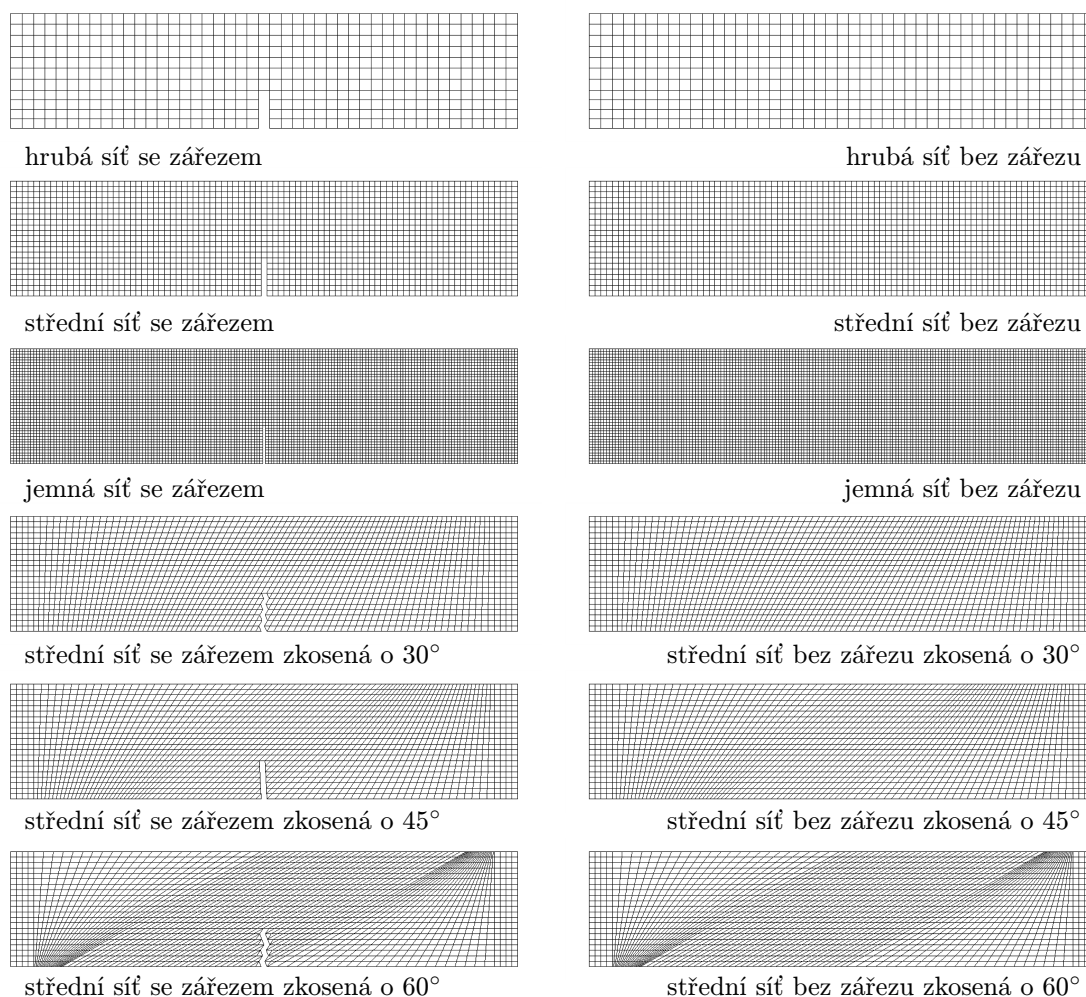
Obrázek 3.4: Ukázka vykreslení vypočtených hodnot v prostředí Paraview.



Obrázek 3.5: Rozměry modelovaného prvku a jeho okrajové podmínky.

3.2 Geometrie modelu

Hlavní výpočty v této práci jsou provedeny na modelu třibodového ohybu. Vzdálenost podpor je $l = 400$ mm, přičemž celková délka trámce je $s = 1.1l = 440$ mm. Výška a tloušťka byly stanoveny jako $v = t = 100$ mm. V případě těles se zářezem je zářez proveden do $1/3$ výšky v a šířka zářezu je měněna dle hustoty sítě konečných prvků tak, aby vždy zabírala pouze jeden pás prvků sítě. Na obr. 3.5 jsou sice znázorněny síly, nicméně zatěžování je prováděno posunem a síly (reakce) jsou až následně měřeny. Jelikož se uprostřed rozpětí nenachází uzel sítě konečných prvků, ve kterém by mohl být měřen průhyb d , jeho hodnota je stanovena jako průměr průhybů dvou bodů (d_1, d_2) nacházejících se nejbližší ose symetrie.



Obrázek 3.6: Sítě konečných prvků

3.3 Síť

Sítě konečných prvků, použité v této práci, jsou vykresleny na obr. 3.6. Hrubá síť má rozměry blízké čtvercům (popř. kosočtvercům) 10×10 mm, střední 5×5 mm a jemná $2,5 \times 2,5$ mm. Protože geometrické rozměry tělesa nejsou násobkem uvedených velikostí prvků, skutečná velikost prvků je nepatrně odlišná.

U jemné sítě pro těleso bez zářezu docházelo k lokálnímu porušování materiálu ve střední části horního líce tlakem. Tento problém je možné řešit například přidáním roznášecích tuhých příložek. V této práci ale byla pro jednoduchost tato varianta sítě vyřazena.

3.4 Materiál

Jelikož jde o simulaci tříbodového ohybu betonového trámce, byl použit materiál odpovídající vlastnostem betonu v tahu. Dle (Patzák, 2011) se jedná o materiál *idm1* pro jednoduchý model porušení⁵ a model pásu trhlin, pro nelokální model je pak materiálový model pojmenován *idmnl1*.

Pro zjednodušení vztahů obecné napjatosti do 2D bylo pro model tříbodového ohybu použito výpočtu podle rovinné napjatosti.

Vlastnosti materiálu jsou zvoleny jako následující:

- modul pružnosti $E = 30 \text{ GPa}$
- pevnost v tahu $f_t = 2,5 \text{ MPa}$
- součinitel příčné kontrakce $\nu = 0.18$
- součinitel teplotní roztažnosti $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
(materiálová konstanta požadovaná programem, není v této práci využita)
- výpočet ekvivalentního napětí dle *Mazarse*
- tvar změkčení *lineární*

Případné další vlastnosti vážící se k jednotlivým modelům, jsou uvedeny v kapitolách, které se zabývají danými modely podrobněji.

Objemová hmotnost materiálu je ve výpočtech pro zjednodušení uvažována nulovou hodnotou.

⁵výpočet bez použití omezovače lokalizace

Kapitola 4

Jednoduchý model porušení

4.1 Kvazikřehké materiály

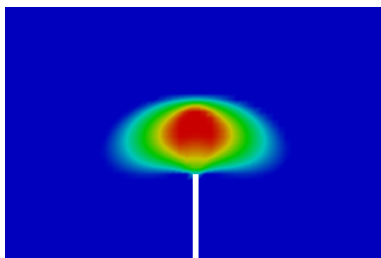
První otázkou, kterou se musíme zabývat předtím, než budeme modelovat jakoukoli konstrukci, je materiál, ze kterého je vytvořena. Podle toho se pak rozhodneme, jaký výpočtový model pro daný případ zvolíme. Obecně bývají uvažovány materiály na základě jejich chování během porušení jako plastické, křehké a kvazikřehké. Nemůžeme však obecně říci, že pro toto dělení nám postačí pouze znalost materiálu jako takového. Vždy jej musíme uvažovat v interakci s geometrickými rozměry tělesa, či konstrukce.

Mezi plastické materiály se řadí například některé druhy zemin a kovy. Chovají se elasticky až po dosažení meze kluzu. Poté se typicky uvažuje, že napětí zůstává konstantní, nebo dokonce mírně narůstá. Nedochází tak k lokalizaci poškození. Při odtížení plastických materiálů zůstávají trvalé deformace.

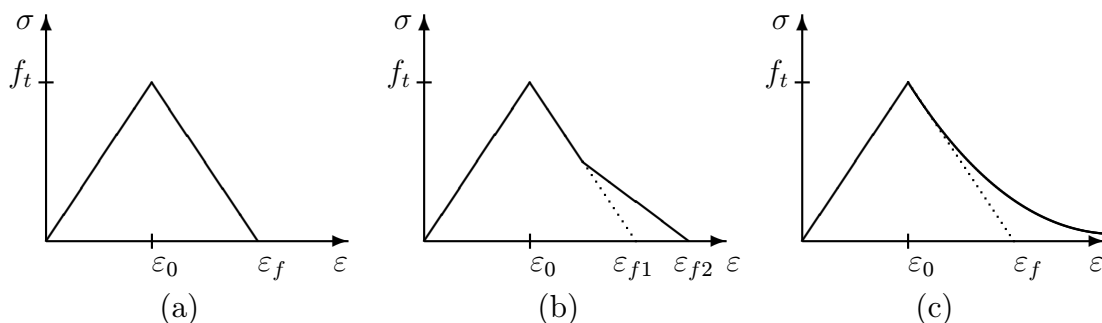
U křehkých a kvazikřehkých materiálů dochází po dosažení meze pevnosti k poklesu napětí a tedy k lokalizaci poškození. Do této skupiny materiálů řadíme například beton, keramiku nebo některé skalní horniny.

Pro modelování kvazikřehkých materiálů je typický konstitutivní zákon se sestupnou větví. Existují různé varianty tvaru sestupné větve. Běžně používané jsou lineární, bilineární, nebo exponenciální. Pro jednoduchost budeme v našich výpočtech používat zákona se změkčením lineárním (obr. 4.2).

Porušení kvazikřehkých materiálů se děje šířením trhliny. Oblast na čele trhliny je nazývána lomovou procesní zónou (obr. 4.1). Jde o oblast, ve které dochází k poškozování materiálu. Charakter odezvy prvku je pak závislý na velikosti zmíněné oblasti. Je-li oblast vůči rozměrům tělesa relativně malá, dochází ke křehkému porušení a pro jeho modelování se používá lineární lomová mechanika. Je-li naopak procesní zóna relativně velká, těleso se bude porušovat téměř plasticky. Tyto dva extrémní případy však nemohou postihnout chování všech druhů materiálů. Materiály, jejichž odezva se nachází v rozmezí mezi zmíněnými případy, jsou označovány jako kvazikřehké. Typickým zástupcem těchto materiálů je beton. Ovšem pořád platí, že velikost procesní zóny musíme uvažovat v poměru k rozměrům tělesa. Betonová



Obrázek 4.1: Procesní zóna na čele trhliny.



Obrázek 4.2: Pracovní diagram pro kvazikřehké materiály se změkčením: (a) lineární, (b) bilineární a (c) exponenciální.

konstrukce extrémních rozměrů se bude porušovat téměř křehce.

4.2 Model porušení

Snažíme-li se převést reálný stav do výpočtového modelu, jsme vždy nuceni dopustit se zjednodušení. Takovým zjednodušením jsou i modely porušení. Jsou sice o krok dál než výpočty z teorie pružnosti, nicméně stále počítají s podmínkami, které u reálné konstrukce nikdy nebudeme schopni zaručit.

V této práci se zaměříme na izotropní model poškození (Jirásek a Zeman, 2006). Do výpočtu zde vstupuje další parametr - poškození ω , charakterizující míru poškození v daném bodě. Materiál nepoškozený má $\omega = 0$, hodnota pro zcela poškozený materiál je pak $\omega = 1$. Výraz pro výpočet napětí se tak změní z lineárního $\sigma = D \varepsilon$ na

$$\sigma = (1 - \omega) D \varepsilon \quad (4.1)$$

kde D je matice tuhosti prvků, σ a ε jsou pak vektory napětí a poměrného přetvoření. Nelinearita rovnice vyplývá z toho, že parametr poškození je závislý na maximálním dosaženém poměrném přetvoření, tedy $\omega = \omega(\varepsilon)$. Parametr poškození

pro lineární sestupnou větev (obr. 4.2 (a)) vychází z výrazu

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{pro } \kappa \leq \varepsilon_0 \\ 1 - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_f - \kappa)}{\kappa(\varepsilon_f - \varepsilon_0)} & \text{pro } \varepsilon_0 \leq \kappa \leq \varepsilon_f \\ 1 & \text{pro } \varepsilon_f \leq \kappa \end{cases} \quad (4.2)$$

kde ε_0 je poměrné přetvoření při dosažení meze pevnosti a ε_f je poměrné přetvoření při poklesu napětí na nulovou hodnotu (obr. 4.2). κ je proměnná, uchovávající maximální dosažené poměrné přetvoření. Pro víceosou napjatost je nutné reprezentovat poměrné přetvoření v bodě pomocí jedné hodnoty, ne celého vektoru. K tomu se využívá tzv. ekvivalentní poměrné přetvoření $\bar{\varepsilon}$. Existuje více variant výpočtu této hodnoty (Jirásek a Bauer, 2012). Standardní nebo modifikovaný výpočet podle *Rankina*, výpočet dle *von Misesse*, nebo v této práci používaný výpočet podle *Mazarse*. Hodnota ekvivalentního poměrného přetvoření dle *Mazarse* se vypočte ze vztahu

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \varepsilon_I \rangle^2} \quad (4.3)$$

kde $\langle \dots \rangle$ značí kladnou část, ε_I jsou hlavní poměrná přetvoření. Proměnnou κ můžeme definovat jako maximální dosažené ekvivalentní poměrné přetvoření

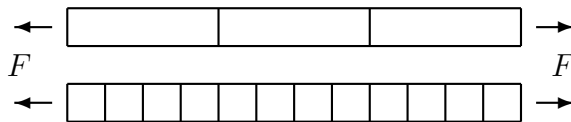
$$\kappa = \max(\bar{\varepsilon}) \quad (4.4)$$

4.3 Lokalizace v 1D

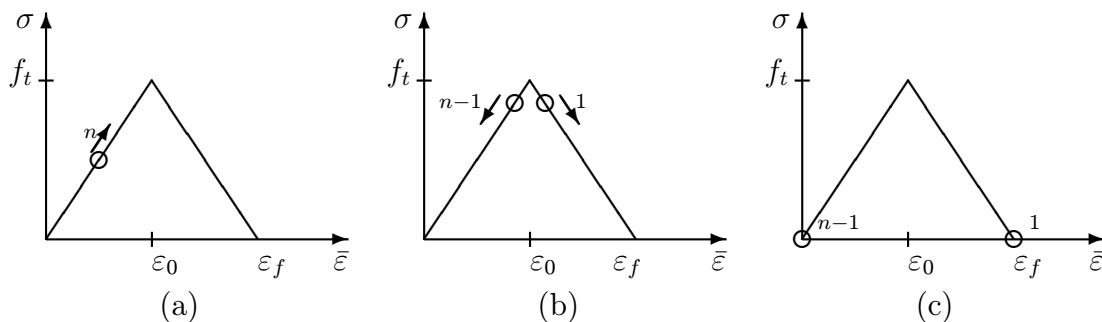
Pokud bychom si chtěli vystačit s popisem uvedeným výše, tak brzy zjistíme, že náš výpočtový model je závislý na hustotě sítě konečných prvků.

Uvažujme tedy dva stejně dlouhé pruty, z nichž první je rozdělen na malý počet konečných prvků a druhý prut je rozdělen na vyšší počet konečných prvků (obr. 4.3). Tyto pruty budeme zatěžovat. Všechny prvky tedy půjdou po vzestupné větvi konstitutivního zákona až k mezi pevnosti f_t . Jejich přetvoření tahem se bude blížit hodnotě ε_0 (obr. 4.4(a)). Až potud se budou oba pruty chovat stejně.

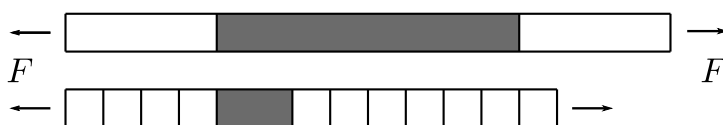
Vlivem matematické chyby dojde k tomu, že jeden z prvků dosáhne pevnosti v tahu dříve než ostatní, a bude klesat po sestupné větvi. V tu chvíli začne napětí klesat a jelikož ostatní prvky ještě nedosáhly pevnosti v tahu, nemohou přejít na sestupnou změkčující větev, nutně se tedy musí vracet stejnou cestou zpět, budou



Obrázek 4.3: Dva pruty o stejných rozměrech namáhané tahem, rozdělené každý na jiný počet segmentů.



Obrázek 4.4: Lokalizace porušení do jednoho prvku.



Obrázek 4.5: Celkové protažení prutu je závislé na hustotě sítě konečných prvků

odtěžovat (obr. 4.4(b)). Porušení se tedy soustřeďuje do jednoho prvku - lokalizuje se. Odtud pojmenování *lokalizace*.

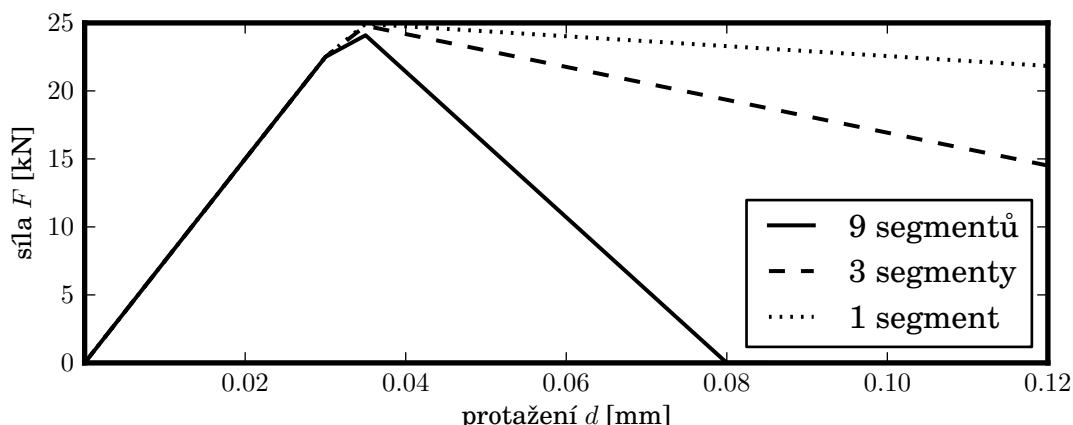
Problém, způsobený tímto jevem je jednoduše vidět v konečném stádiu přetváření prutu. Napětí klesne na nulovou hodnotu, přetvoření změkčujícího prvku je tedy rovno ε_f a přetvoření ostatních prvků sestoupilo zpět na počáteční hodnotu, je tedy rovno nule (obr. 4.4(c)). Na obrázku 4.5 je jasně vidět, že při takto zadaném zákoně porušení dojdeme na různě hustých sítích k různým výsledkům celkového protažení prutu. Pro názornost je uvažována hodnota $\varepsilon_f = 1$, tedy délka prvku, ve kterém se lokalizuje porušení, je na konci oproti počátečnímu stavu dvojnásobná.

Předchozí příklad byl pouze teoretický, a proto byl pro názornou ukázkou vymodelován a spočítán příklad jednoose namáhaného taženého prutu o délce $l = 400\text{mm}$, tloušťce a šířce $h = t = 100\text{mm}$. Na obr. 4.6 jsou vykresleny zatěžovací křivky taženého prutu rozděleného na 1, 3 a 9 konečných prvků.

Pro všechny případy byly uvažovány následující parametry konstitutivního zákona: modul pružnosti $E = 30\text{ GPa}$, pevnost v tahu $f_t = 2,5\text{ MPa}$ a $\varepsilon_f = 0,0018$. Zalomený průběh křivky zatěžovacího diagramu je způsoben pouze faktem, že velikost výpočtového kroku není dělitelem ε_0 . Je zřejmé, že jemnější dělení sítě vede na křehčí chování modelovaných prvků, tedy síla klesá s rostoucí deformací rychleji.

4.4 Lokalizace ve 2D

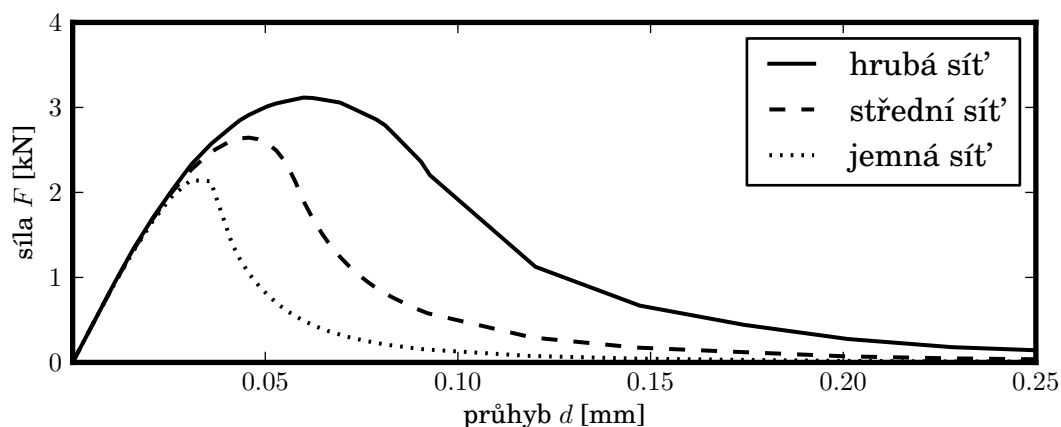
Podobné chování lze pozorovat na modelu tříbodového ohybu. Pro tento model byly uvažovány různě husté sítě pro těleso se zářezem i bez zářezu. Geometrie sítí je uvedena v podkapitole geometrie (3.2).



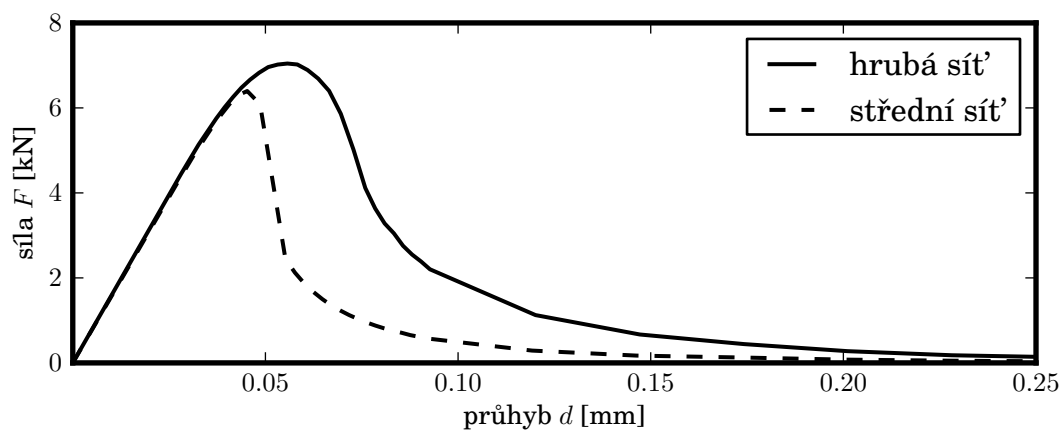
Obrázek 4.6: Závislost zatížení a posunu taženého prutu rozděleného na různý počet segmentů (bez použití omezovače lokalizace).

Hodnoty parametrů konstitutivního zákona, které jsou v modelu použity: modul pružnosti $E = 30$ GPa, pevnost v tahu $f_t = 2,5$ MPa, $\varepsilon_f = 0,004$. Hustota materiálu pro zjednodušení není uvažována. Výpočet ekvivalentního napětí podle *Mazarse* (rce. 4.3). Změkčení na sestupné větvi je lineární.

Závislost na síti je patrná v obou případech, jak v modelu trámce se zářezem 4.7, tak v modelu trámce bez zářezu 4.8. Neliší se zde pouze sestupná větev, ve výpočtu získáváme také zcela odlišné hodnoty maximálních sil.



Obrázek 4.7: Ukázka závislosti výsledků modelu tříbodového ohybu na hustotě sítě konečných prvků; těleso se zářezem.



Obrázek 4.8: Ukázka závislosti výsledků modelu třibodového ohybu na hustotě sítě konečných prvků; těleso bez zářezu.

Kapitola 5

Model pásu trhlin

V předchozí kapitole byl zmíněn problém závislosti výsledků konečně prvkového modelu porušení na hustotě sítě konečných prvků, a zdůvodněna jeho příčina. V této kapitole se podíváme na jeden z možných způsobů eliminace tohoto nepříznivého jevu. První cestou k omezení nepříznivých vlivů lokalizace na výsledky výpočtového modelu, kterou se budeme zabývat, je model pásu trhlin (Bažant a Oh, 1983; Bažant a Planas, 1998).

5.1 Lomová energie

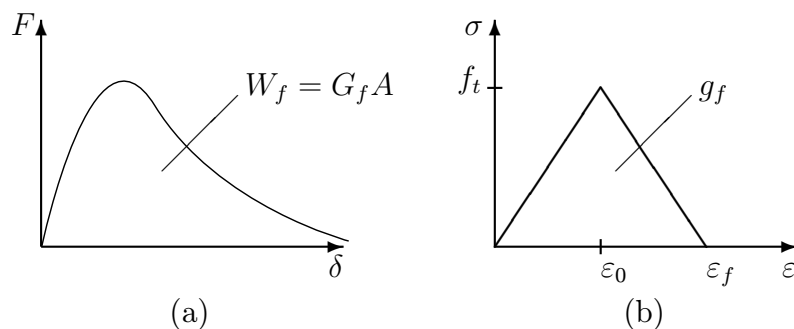
Důležitým parametrem, který určuje chování materiálu, je tzv. *lomová energie*, G_f . Je definovaná jako energie potřebná k vytvoření trhliny o ploše 1m^2 . Předpokládá se, že jde o materiálovou konstantu, nezávislou na tvaru a velikosti tělesa.

Disipovaná energie se rovná obsahu oblasti pod grafem globálního pracovního diagramu (obr. 5.1(a)) a musí odpovídat výrazu $W_f = A_f G_f$. Kde W_f je celková energie uvolněná porušením tělesa, A_f je plocha trhliny, pro výpočet běžně uvažovaná z rozměrů porušovaného tělesa $A_f = v t$ (pro těleso bez zářezu). Stejně tak energie, uvolněná v jednom elementu, kam se porušení lokalizovalo, musí odpovídat lomové energii násobené porušenou plochou elementu. Právě zajištění konstantní disipace energie na jednotku porušené plochy v každém konečném prvku je hlavní myšlenkou modelu pásu trhlin.

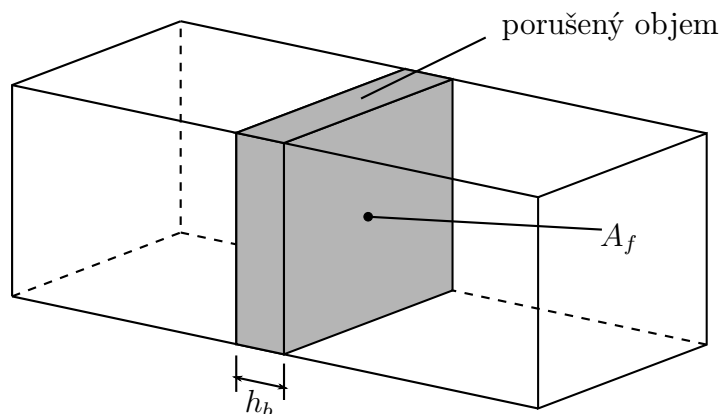
V modelu pásu trhlin jsme smířeni s faktem, že ve výpočtu dochází k lokalizaci poškození do jednoho prvku. Neblahých důsledků tohoto faktu se zbavíme, budeme-li sestupnou větev měnit podle hustoty sítě tak, aby byla disipována konstantní energie. Přesněji podle velikosti elementu, ve kterém se porušení lokalizuje. Tento přístup je přes svoji jednoduchost velice účinný.

Na obr. 5.1(b) je konstitutivní zákon (s lineárním změkčením). Obsah plochy pod grafem se rovná obsahu trojúhelníka (pouze pro lineární změkčení) a představuje energii, disipovanou při porušení, na jednotku objemu (obr. 5.2).

$$g_f = \frac{\varepsilon_f f_t}{2} \quad [\text{J}/\text{m}^3] \quad (5.1)$$



Obrázek 5.1: (a) Globální pracovní diagram tělesa porušovaného trhlinou, (b) konstitutivní zákon pro model pásu trhlín.



Obrázek 5.2: Rozměry uvažovaného porušeného objemu.

Jednotkou lomové energie je J/m^2 . Hodnota g_f tedy není ještě hodnotou lomové energie. Jde o hodnotu energie uvolněné v porušeném objemu. Do výpočtu tedy musíme zavést kromě plochy trhliny ještě třetí rozměr, pomocí kterého vypočteme hodnotu objemu. Zmíněný třetí rozměr pak použijeme pro definici vztahu mezi g_f a G_f následujícím způsobem

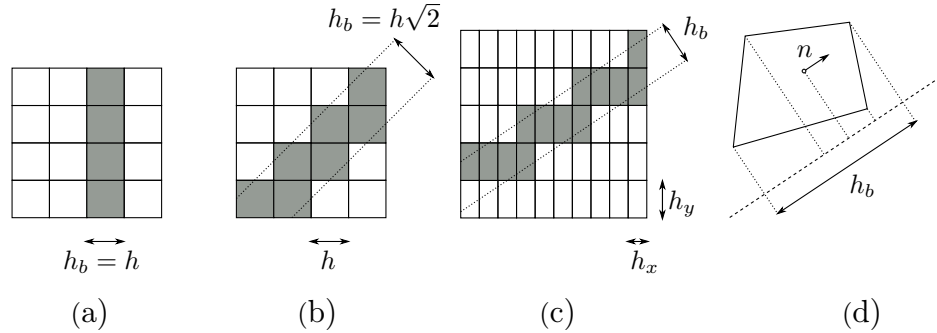
$$g_f = \frac{G_f}{h_b} \quad (5.2)$$

kde h_b je uvažovaná šířka pásu trhlín (blíže rozebráno v podkapitole 5.2). Spojením rovnic 5.1 a 5.2 získáme vztah

$$\varepsilon_f = \frac{2 G_f}{h_b f_t} \quad (5.3)$$

5.2 Šířka pásu trhlín

Šířka pásu trhlín h_b není závislá jen na velikosti elementů, ale také na směru šíření trhliny vzhledem k jednotlivým konečným prvkům. K výpočtu tohoto rozměru lze přistoupit více způsoby.



Obrázek 5.3: Možnosti odhadu šířky pásu trhlin: (a) směr trhliny je shodný se směrem sítě, (b) trhlina ve směru diagonál čtvercové sítě, (c) obecný směr trhliny v pravidelné obdélníkové síti, (d) průmět prvku kolmo na směr maximálního hlavního napětí (n v obrázku značí směr maximálního hlavního napětí) (Jirásek a Bauer, 2012).

Je-li směr šíření trhliny shodný se směrem sítě konečných prvků, můžeme uvažovat hodnotu h_b jednoduše rovnu délce strany prvku h (obr. 5.3(a)).

Při odklonu směru šíření trhliny od linií sítě konečných prvků není možné porušený objem, a tedy ani šířku pásu trhlin přesně určit. Možností je použití hodnoty odmocniny z plochy prvku $h_b = \sqrt{A}$. Porušený objem totiž odpovídá přesně jedné řadě konečných prvků. Odmocnina se nabízí zejména, pokud uvažujeme čtvercovou síť. (Jirásek a Bauer, 2012) Tento přístup je jednoduše použitelný, nicméně v zmíněném článku je ověřeno, že může vést na nepřesné výsledky. Především pokud se jedná o síť trojúhelníkovou, nebo síť čtyřúhelníkovou s neregulárním poměrem stran.

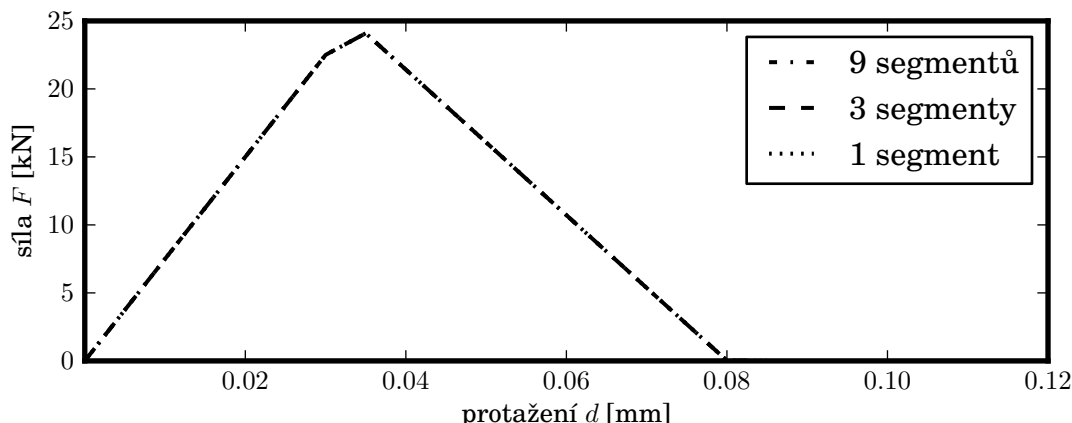
V článku jsou uvedeny i další možné modifikace tohoto přístupu, pro trhlínu šířící se ve směru diagonál čtvercové sítě $\sqrt{2}A \approx 1,414\sqrt{A}$ (obr. 5.3(b)), v případě trojúhelníkové sítě je možno uvažovat šířku pásu trhlin jako výšku trojúhelníka, pak pro rovnostranný trojúhelník můžeme uvažovat $h_b = \sqrt[3]{A} \approx 1,316\sqrt{A}$.

Nejrozšířenější možností, aplikovanou i v programu Oofem a pomocí které jsou výsledky simulací v této práci spočítány, je odhadnout šířku pásu trhlin jako průmět elementu kolmo na směr maximálního hlavního napětí σ_I (obr. 5.3(d)) (Patzák, 2011).

Další možností je odhad šířky založený na použití tzv. akustického tenzoru, pomocí kterého se určí směr šíření trhliny (Oliver, 1989). Tento přístup vede na složitější výpočty, které jsou nad rámec této práce.

5.3 Model pásu trhlin v 1D

Aplikujme tedy přepočty pomocí lomové energie na tažený prut z předchozí kapitoly (obr. 4.6). Lomovou energii stanovíme podle vztahu 5.3 tak, aby sestupná



Obrázek 5.4: Pracovní diagram taženého prutu při použití modelu pásu trhlin. výsledky simulací

větev odpovídala jednoduchému modelu trámce rozděleného na 9 segmentů. Pak

$$h_b = l/9 = 400/9 \doteq 44,44 \text{ mm} \quad (5.4)$$

dosazením 5.4 do 5.3 (v základních jednotkách) získáme hodnotu lomové energie

$$G_f = \frac{\varepsilon_f h_b f_t}{2} = \frac{0,0018 \cdot 44,44 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^6}{2} = 100 \text{ J/m}^2 \quad (5.5)$$

Další parametry konstitutivního zákona ponecháme shodně $E = 30 \text{ GPa}$ a $f_t = 2,5 \text{ MPa}$.

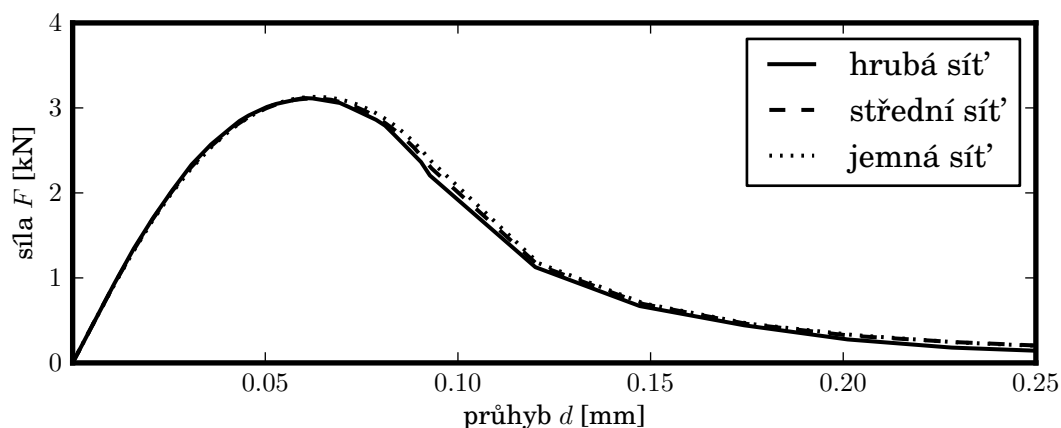
Na obr. 5.4 jsou vykresleny tři křivky, každá pro jinou diskretizaci modelovaného prutu. Definováním sestupné větve konstitutivního zákona pomocí lomové energie G_f jsme získali model, jehož výsledky nezávisí na hustotě sítě konečných prvků. Proto se křivky překrývají a dávají tak shodnou sestupnou větev.

5.4 Model pásu trhlin ve 2D

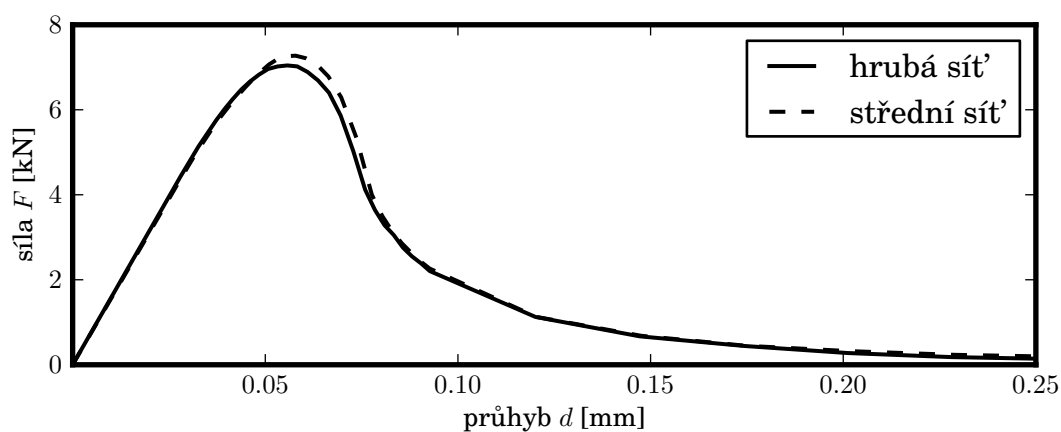
Hlavním úkolem této práce je ověřit funkčnost omezovačů lokalizace na modelu třibodového ohybu. Fakt, že tento přístup funguje na jednoosé napjatosti nemusí zaručovat jeho použitelnost pro další způsoby namáhání. Vyzkoušejme tedy jeho funkčnost pro náš případ.

Materiálové parametry ponechme shodné s příkladem z předchozí kapitoly (4.4). Pak $E = 30 \text{ GPa}$, $f_t = 2,5 \text{ MPa}$ a ε_f bude proměnnou závislou na lomové energii G_f .

Její hodnotu stanovíme obdobným postupem jako u jednoosé napjatosti (rce. 5.5), přičemž velikost pásu trhlin budeme uvažovat jako délku strany prvku v hrubé síti



Obrázek 5.5: Zatěžovací křivky tělesa se zářezem při použití modelu pásu trhlin pro různě hrubé sítě.



Obrázek 5.6: Zatěžovací křivky tělesa bez zářezu při použití modelu pásu trhlin pro různě hrubé sítě.

(sekce 3.3) $h \approx 10$ mm. Po dosazení $h_b = 10$ mm do vztahu 5.3 nám vyjde

$$G_f = \frac{\varepsilon_f h_b f_t}{2} = \frac{0,004 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^6}{2} = 50 \quad \text{J/m}^2 \quad (5.6)$$

Na obr. 5.5 a 5.6 jsou zobrazeny výsledky použití zmíněného přístupu. Odezva je pro všechny sítě až na drobné odchylky shodná.

Kapitola 6

Nelokální model

Model pásu trhlin je sice nazýván omezovačem lokalizace, nicméně lokalizaci do jednoho prvku jako takovou neeliminuje. Omezuje pouze její nepříznivé účinky na výpočet pomocí úpravy konstitutivního zákona. V této kapitole je blíže nahlédnuto na další z omezovačů - nelokální model (Jirásek, 1998).

6.1 Obecně

Nelokální přístup má poněkud odlišnou koncepci. Používá konstitutivní zákon s jednotnou hodnotou ε_f . Nelokální se nazývá proto, že lokální hodnoty přepočítává přes tzv. *váhovou funkci* α_0 na hodnoty nelokální. Tím dosahuje toho, že se trhlinka nelokalizuje pouze do jednoho prvku, ale má konstantní šířku. Při výpočtu porušení se pak rovnice 4.4 změní na

$$\kappa = \max(\tilde{\varepsilon}) \quad (6.1)$$

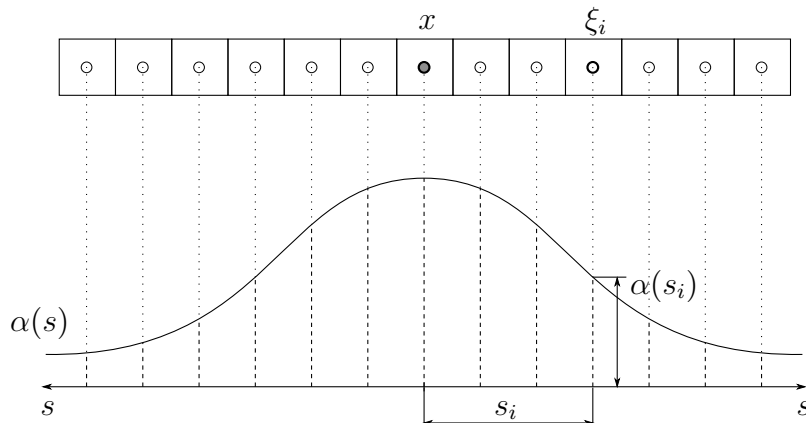
kde $\tilde{\varepsilon}$ je hodnota nelokálního ekvivalentního poměrného přetvoření, které se vypočte pomocí normalizované váhové funkce ze vztahu

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(s) \bar{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) dV \quad (6.2)$$

kde $\bar{\varepsilon}$ je hodnota lokálního poměrného přetvoření a s je vzdálenost mezi vyšetřovaným (\mathbf{x}) a započítávaným ($\boldsymbol{\xi}$) bodem $s = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$. $\alpha(s)$ je pak normalizovaná váhová funkce. Váhové funkce z podkapitoly 6.2 mají ve vrcholu většinou hodnotu 1,0 (obr. 6.2). Požadavkem ale je, aby se součet hodnot váhové funkce rovnal jedné $\int_V \alpha(s) dV = 1$. Aby funkce splňovala zmíněný požadavek, je ji třeba normalizovat podle vztahu

$$\alpha(s) = \frac{\alpha_0(s)}{\int_V \alpha_0(s) dV} \quad (6.3)$$

Ve vztazích 6.2 a 6.3 nesmíme zapomenout, že proměnná s ve váhové funkci $\alpha_0(s)$ je závislá na dalších proměnných \mathbf{x} a $\boldsymbol{\xi}$.



Obrázek 6.1: Příklad použití normalizované váhové funkce.

Při diskretizaci modelu do MKP jsou uvedené integrály vyčísleny jako diskrétní součty přes integrační body modelu (obr. 6.1). V rovnici 6.2 se pak místo integrálu použije sumace

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_V \alpha(s_i) \bar{\varepsilon}(\xi_i) \quad (6.4)$$

Uvažujme tedy integrační bod, jehož ekvivalentní hodnota lokálního poměrného přetvoření se nachází na vzestupné větvi konstitutivního zákona ($\bar{\varepsilon} < \varepsilon_0$). Díky průměrování hodnot pomocí váhové funkce se ale může stát, že ekvivalentní hodnota nelokálního poměrného přetvoření $\tilde{\varepsilon}$ bude větší jak ε_0 . Pokud se v okolí uvažovaného bodu (v rámci dosahu váhové funkce) nacházejí prvky s vyšší hodnotou lokálního $\bar{\varepsilon}$ než je v daném bodě, pak bude jeho hodnota nelokálního $\tilde{\varepsilon}$ automaticky vyšší než lokálního. Budou-li lokální hodnoty okolních bodů o tolik vyšší, že nelokální průměr přesáhne hodnotu ε_0 , bude se bod nacházet na sestupné větvi konstitutivního zákona a tím pádem bude v daném bodě nenulová hodnota porušení. Dochází tak k rozložení porušení do oblasti větší, než je jen jeden úzký pás konečných prvků.

Existují i jiné verze nelokálního přístupu. Liší se podle toho, pro který parametr jsou v modelu přepočítávány hodnoty z lokálních na nelokální (Jirásek, 1998). V této práci je používán přepočet přes ekvivalentních napětí.

6.2 Váhové funkce

Pro popis váhové funkce můžeme použít prakticky jakoukoli funkci, která s rostoucí vzdáleností klesá. Z toho vyplývá, že vhodnou funkcí bude jistě například Gaussova křivka.

Z množství funkcí které splňují zmíněné podmínky se zde budeme zabývat pouze těmi, které jsou pro nelokální formulaci běžně používané. Ve funkcích se objevují hodnoty s a R . První z hodnot značí vzdálenost mezi počítaným a přepočítávaným bodem, druhá pak udává poloměr funkce a je námi volenou konstantou.

První funkcí je zvonovitá funkce ve tvaru

$$\alpha_0(s) = \left(1 - \frac{s^2}{R^2}\right)^2 \quad (6.5)$$

přičemž pro hodnoty $s > R$ je funkční hodnota nulová. Má tedy omezenou působnost. Tato funkce je použita v této práci při výpočtech s nelokální formulací.

Hojně používanou funkcí je již zmíněná Gaussova rozdělovací funkce.

$$\alpha_0(s) = \exp\left(-\frac{s^2}{R^2}\right) \quad (6.6)$$

Tato funkce má neomezený dosah, ale pro hodnoty blíží se nule se z výpočetních důvodů funkční hodnota uvažuje nulová. V programu Oofem jsou nulové uvažovány hodnoty pro $s > 2.5R$.

Další možností je použití exponenciální funkce ve tvaru

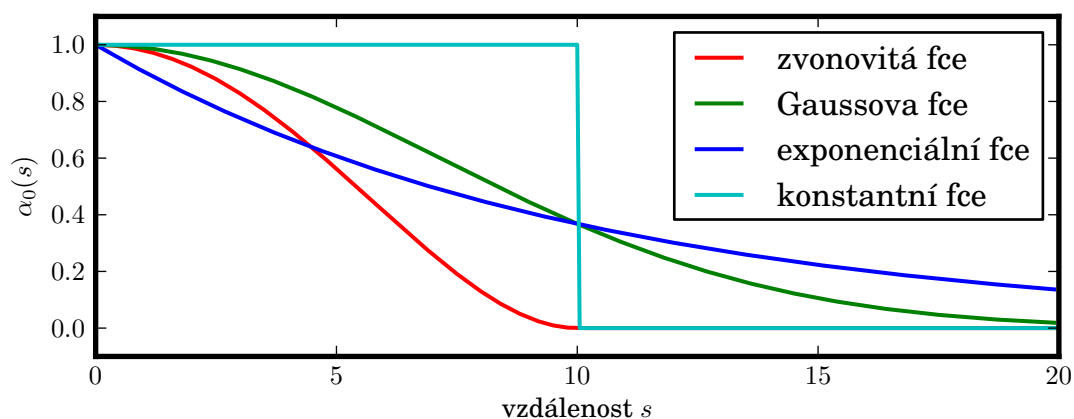
$$\alpha_0(s) = \exp\left(-\frac{s}{R}\right) \quad (6.7)$$

Také není omezená, nicméně ze stejných důvodů se uvažuje nulová pro hodnoty $s > 6R$.

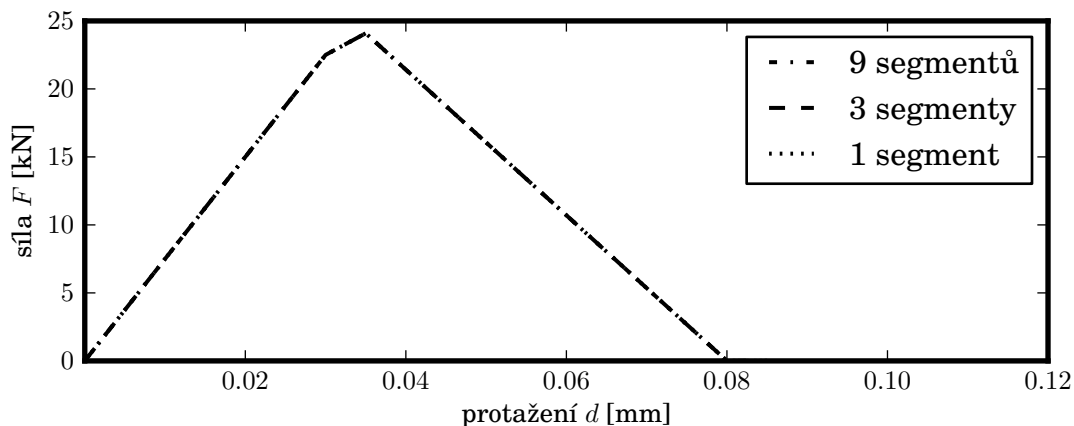
Jednou z možných je i po částech konstantní funkce. Například

$$\alpha_0(s) = \begin{cases} 1 & \text{pro } s \leq R \\ 0 & \text{pro } s > R \end{cases} \quad (6.8)$$

Tato funkce je extrémním případem - uvažuje po celém intervalu R stejnou hodnotu (Patzák, 2011).



Obrázek 6.2: Váhové funkce pro hodnotu $R = 10$; dobře patrný je důvod, proč se hodnota Gaussovy křivky pro $s > 2,5R$ uvažuje nulová.



Obrázek 6.3: Pracovní diagram taženého prutu při použití nelokálního modelu.

6.3 Nelokální přístup v 1D

Jako první si použití nelokálního přístupu ukážeme opět na příkladu taženého prutu jako v sekcích 4.3 a 5.3.

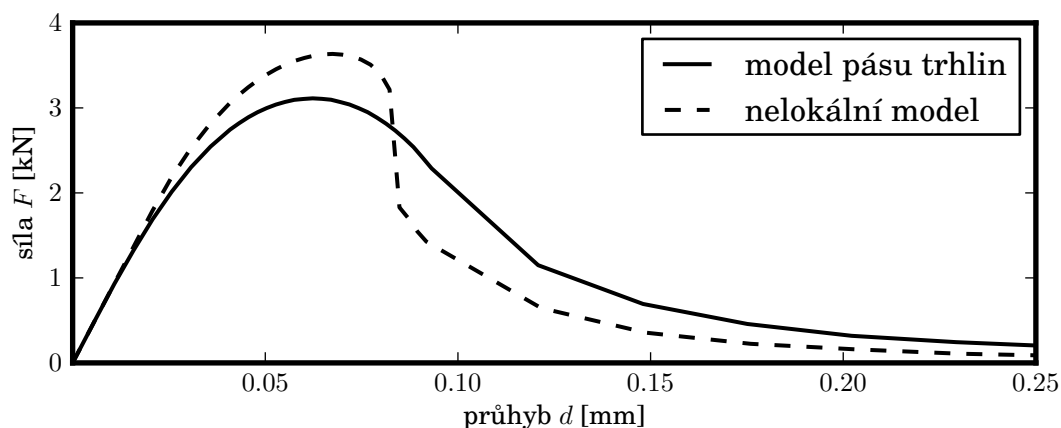
Nejdříve musíme stanovit velikost poloměru R pro rozsah váhové funkce a uvažovanou hodnotu ε_f . Chceme tedy, aby se výsledky na všech sítích shodovali. Zpětně přepočteme ε_f podle vztahu pro lomovou energii (5.3) na síť o jednom prvku (kdybychom uvažovali ε_f pro síť o 9 segmentech podle modelu pásu trhlin, dostali bychom stejné výsledky jako pro lokální model) a rádius váhové funkce stanovíme dostatečně velký, aby zahrnul alespoň dva okolní prvky.

Počítáme tedy s hodnotami $\varepsilon_f = 0,0002$ a $R = 150$ mm. Další parametry konstitutivního zákona (E, f_t) se oproti použití modelu pásu trhlin v 1D nijak neliší.

Na obr. 6.3 jsou zobrazeny zatěžovací křivky. Opět jsou pro všechny tři případy shodné. Díky zpětnému přepočtu přes lomovou energii jsme navíc získali shodnou odezvu jako pro model pásu trhlin.

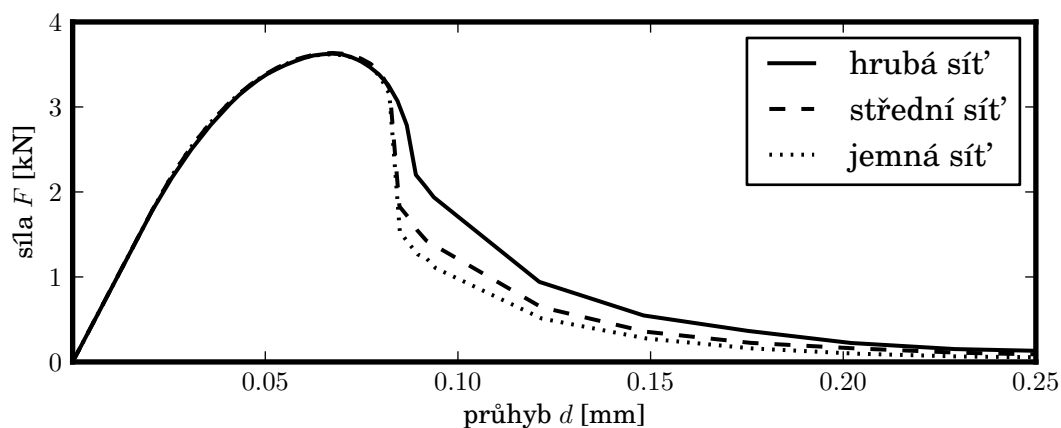
6.4 Nelokální přístup ve 2D

V rovině je dosah váhové funkce ohraničen kružnicí o poloměru R . Proto není tak snadné nastavit parametry výpočtu tak, abychom získali výsledky shodné s modelem pásu trhlin, jako v případě jednoosé napjatosti. Poloměr volíme tak, aby i na nejhrubší síti zahrnoval více prvků. Hodnota byla stanovena jako $R = 10$ mm. Poté jsme hledali vhodný parametr ε_f takový, aby se odezva modelu s nelokálním průměrováním blížila odezvě modelu pásu trhlin 6.4. Tato hodnota byla stanovena jako $\varepsilon_f = 0,002$.

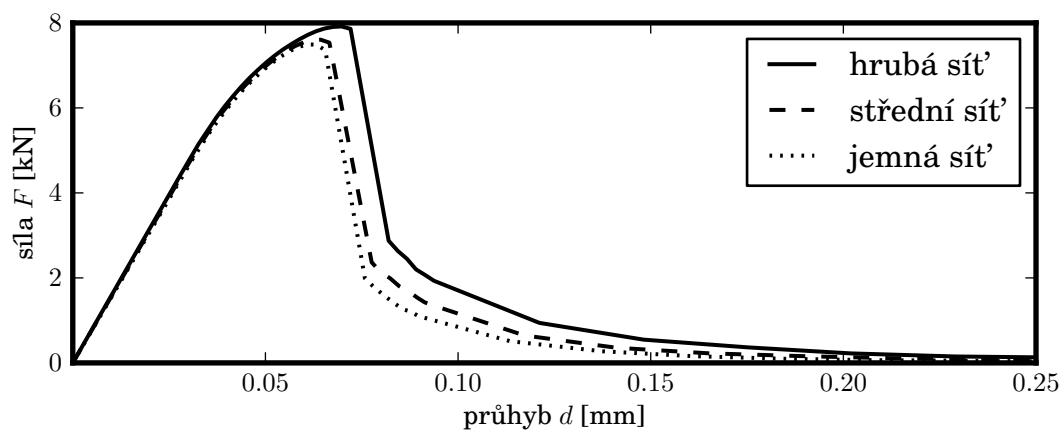


Obrázek 6.4: Přibližná shoda zatěžovacích křivek pro model pásu trhlin a nelokální model na středně hrubé síti.

Na obr. 6.5 a 6.6 jsou zatěžovací křivky těles s a bez zářezu. Výsledky, jak pro těleso se zářezem, tak bez zářezu, vykazují větší nepřesnosti než v případě modelu pásu trhlin. Ten dosahuje přesnějších výsledků, protože v případě rovných sítí je snadné stanovit šířku pásu trhliny. Na šikmých sítí se jeho přesnost může změnit.



Obrázek 6.5: Zatěžovací křivky tělesa se zářezem za použití nelokálního modelu pro různě hrubé sítě.



Obrázek 6.6: Zatěžovací křivky tělesa bez zářezu za použití nelokálního modelu pro různé hrubé sítě.

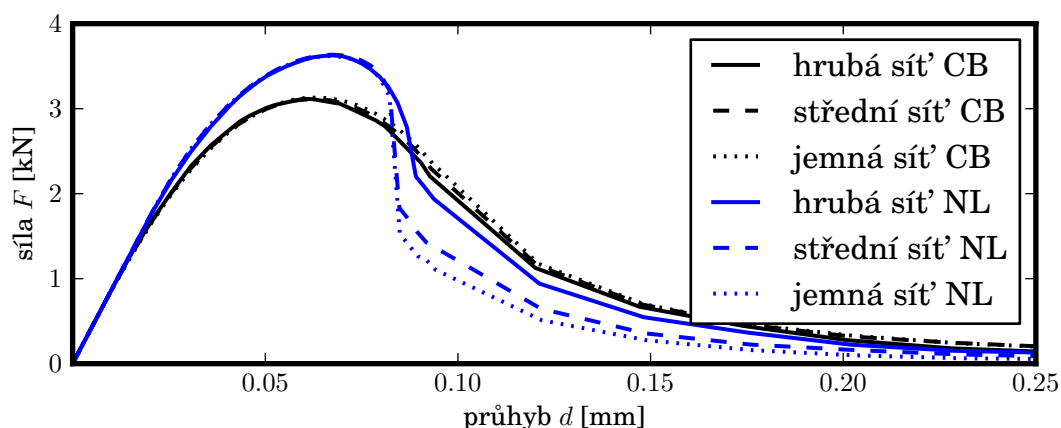
Kapitola 7

Vzájemné porovnání obou přístupů

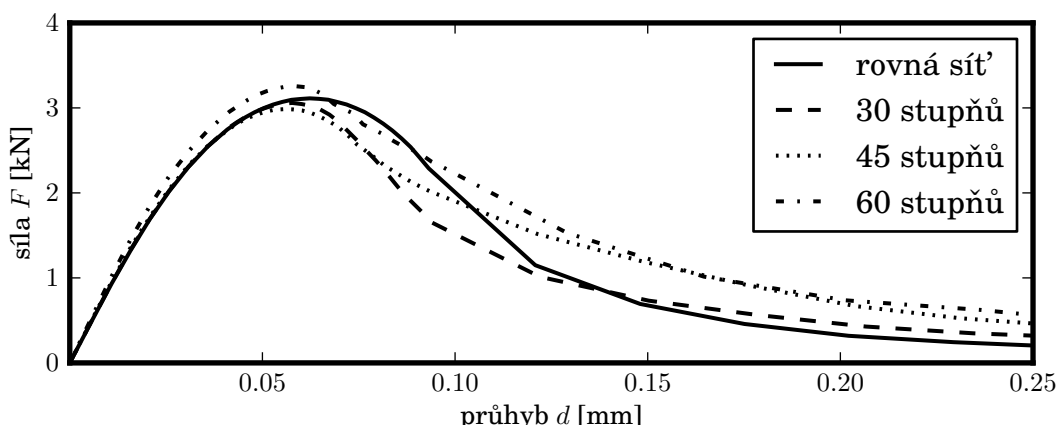
7.1 Porovnání zatěžovacích křivek

Při porovnávání obou přístupů se budeme nejprve věnovat srovnání vypočtených zatěžovacích křivek. Na obr. 7.1 jsou vykresleny zatěžovací křivky pro těleso se zářezem. Křivky pro všechny hrubosti sítě. Proč se křivky modelu pásu trhlin a nelokálního modelu neshodují bylo rozebráno v podkapitole 6.4. Důvodem jsou rozdílné sady vstupních parametrů obou omezovačů lokalizace.

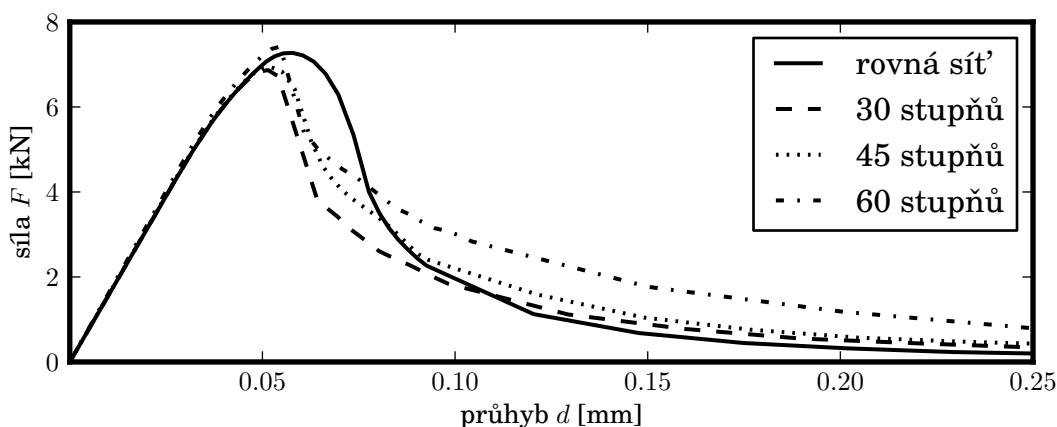
Zajímavé je srovnání vlivu hustoty sítě. Je evidentní, že model pásu trhlin je v tomto případě účinnější, neboť zatěžovací křivky se při jeho použití na různě hrubých sítích téměř shodují. Nelokální model vykazuje větší rozptyl. Pozitivní je, že oba omezovače jsou velmi účinné při odstranění vlivu sítě na výsledné maximální zatížení.



Obrázek 7.1: Porovnání všech zatěžovacích křivek pro model pásu trhlin (CB) a nelokální model (NL) na trámcih se zářezem v neukloněné síti.



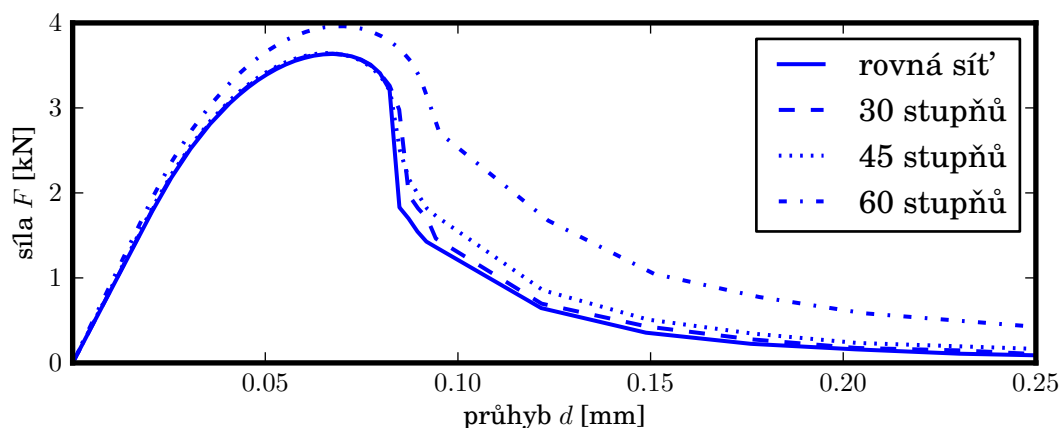
Obrázek 7.2: Zatěžovací křivky pro zkosené sítě na tělese se zářezem při použití modelu pásu trhlin.



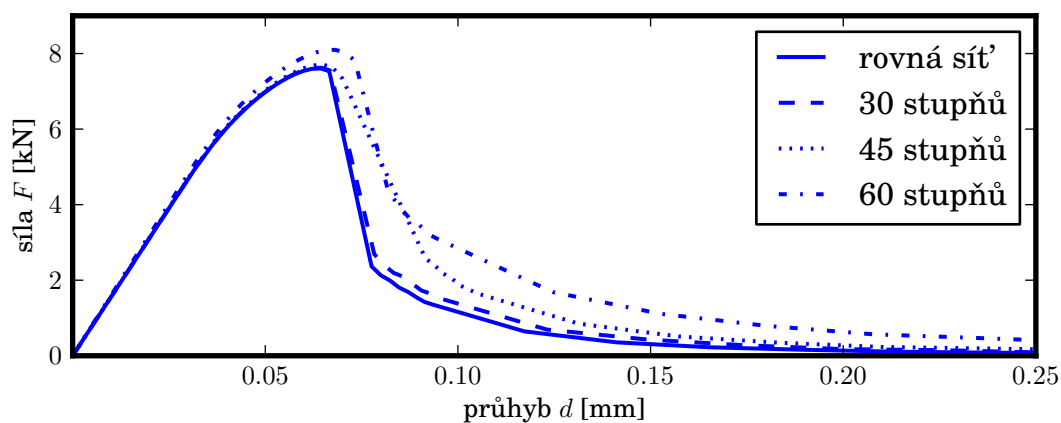
Obrázek 7.3: Zatěžovací křivky pro zkosené sítě na tělese bez zářezu při použití modelu pásu trhlin.

Další porovnání obou přístupů bylo provedeno na zkosených sítích. Rozměry konečných prvků vycházejí ze středně hrubé sítě, navíc jsou ale zkoseny o 30, 45 a 60 stupňů od vertikální osy. I v případě zkosených sítí jsou vždy dvě varianty a to síť se zářezem a bez zářezu. Zářez je proveden do $1/3$ výšky trámce v . Sítě jsou zobrazeny na obr. 3.6 v podkapitole 3.3.

Zatímco na neukloněných sítích se model pásu trhlin jeví jako velice přesný, na zkosených sítích, kde je výpočet šířky pásu trhliny složitější, tuto přesnost ztrácí (obr. 7.2 a 7.3).



Obrázek 7.4: Zatěžovací křivky pro zkosené síť na tělese se zářezem při použití nelokálního modelu.



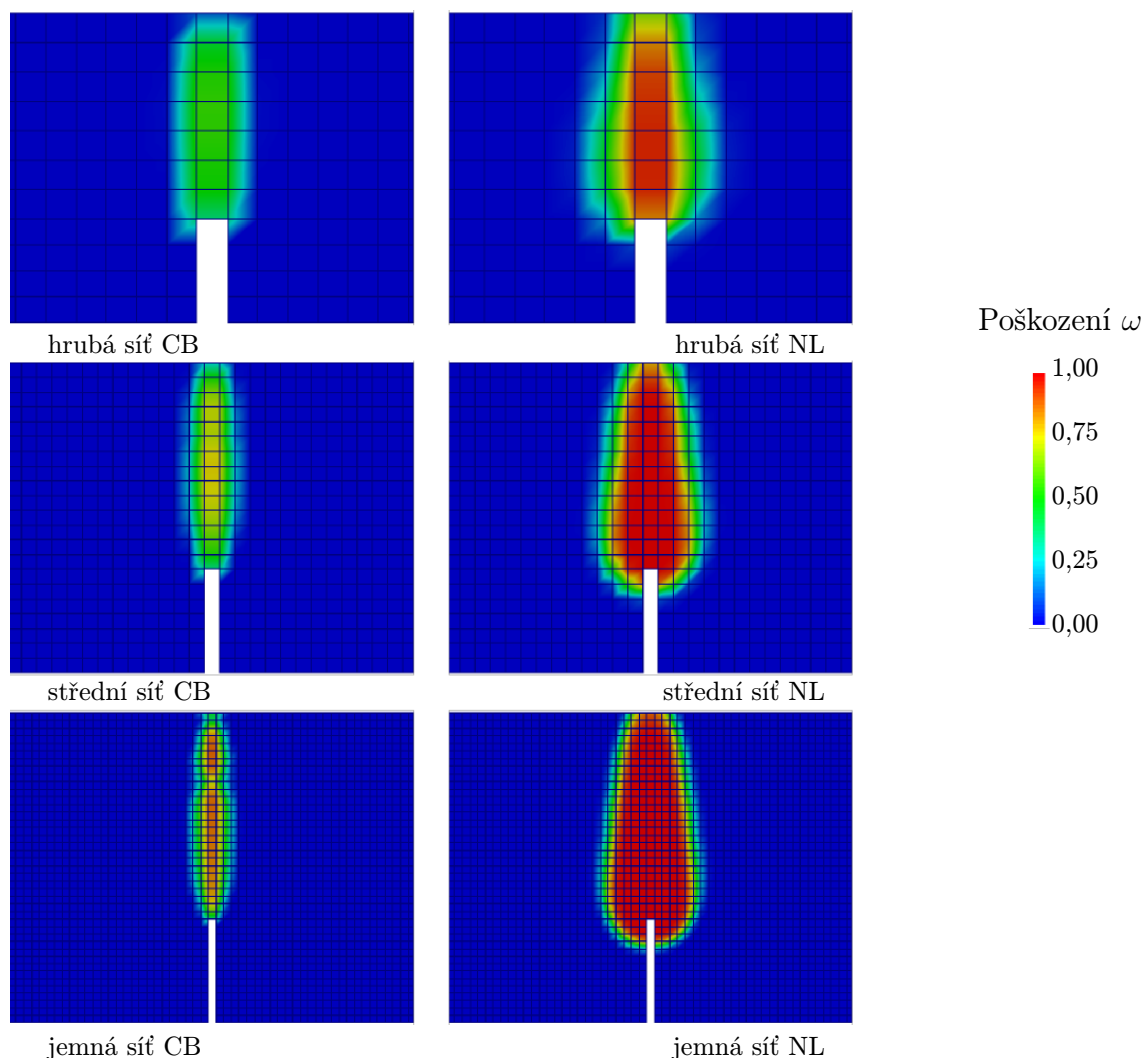
Obrázek 7.5: Zatěžovací křivky pro zkosené síť na tělese bez zářezu při použití nelokálního modelu.

Na obr. 7.4 a 7.5 jsou zobrazeny výsledky pro zkosené síť při použití druhého z omezovačů - nelokálního modelu. Oproti modelu pásu trhlin jsou výsledky relativně přijatelné až do hodnoty zkosení 45° . Při zkosení o 60° již model vykazuje také značnou nepřesnost.

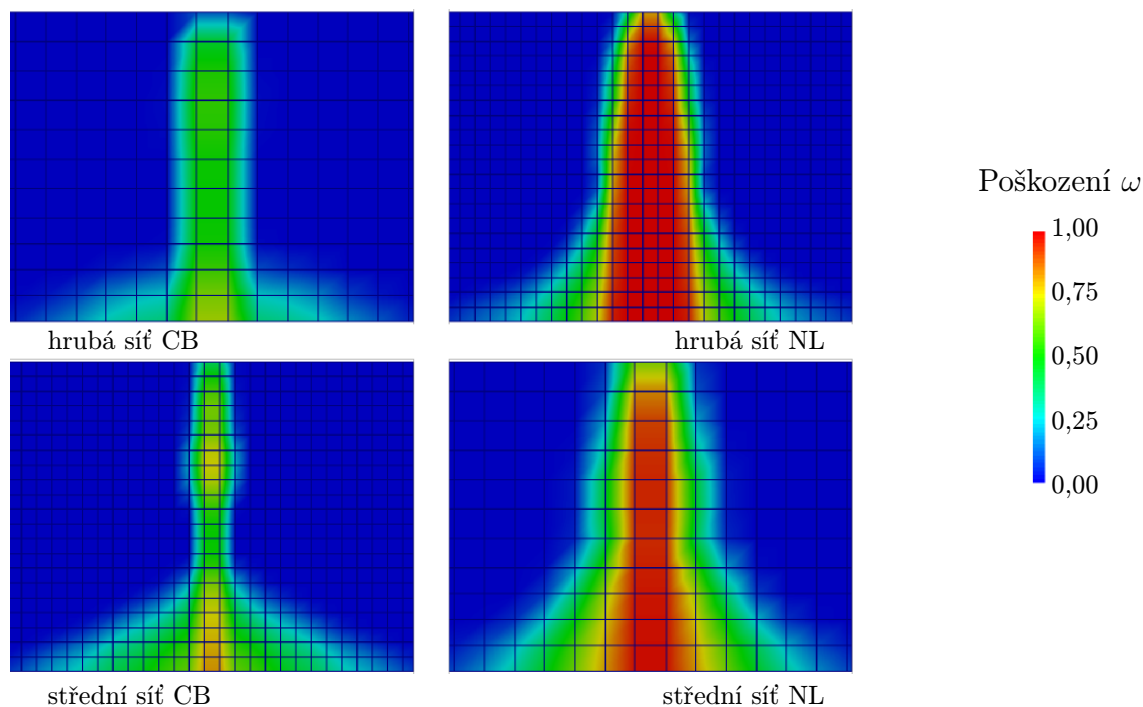
7.2 Porovnání tvarů trhliny

V této části se budeme věnovat dalšímu kritériu, podle kterého můžeme určit vhodnost použití daného modelu. Podívejme se na tvar porušované oblasti v modelovaném tělese. Víme-li, jakým způsobem by se mělo dané těleso porušovat, naše práce je o to snazší. U našeho modelu tříbodového ohybu by se měla (zejména pro těleso se zářezem) trhлина šířit vertikálně vzhůru.

Na obr. 7.6 a 7.7 jsou zobrazeny hodnoty poškození ω v posledním výpočtovém kroku pro různě hrubé neukloněné sítě. První z obrázků ukazuje poškození u trámů se zářezem, druhý pak u trámů bez zářezu. Obrázky ukazují pouze výřezy ze střední



Obrázek 7.6: Porovnání oblasti poškození v posledním výpočtovém kroku na tělese se zářezem pro různě hrubé neukloněné sítě konečných prvků; CB - hodnoty pro model pásu trhlin, NL - hodnoty pro nelokální model.



Obrázek 7.7: Porovnání rozsahu poškození v posledním výpočtovém kroku na tělese bez zářezu pro různě hrubé neukloněné sítě konečných prvků; CB - hodnoty pro model pásu trhlín, NL - hodnoty pro nelokální model.

části tělesa, výška tělesa ořezána není.

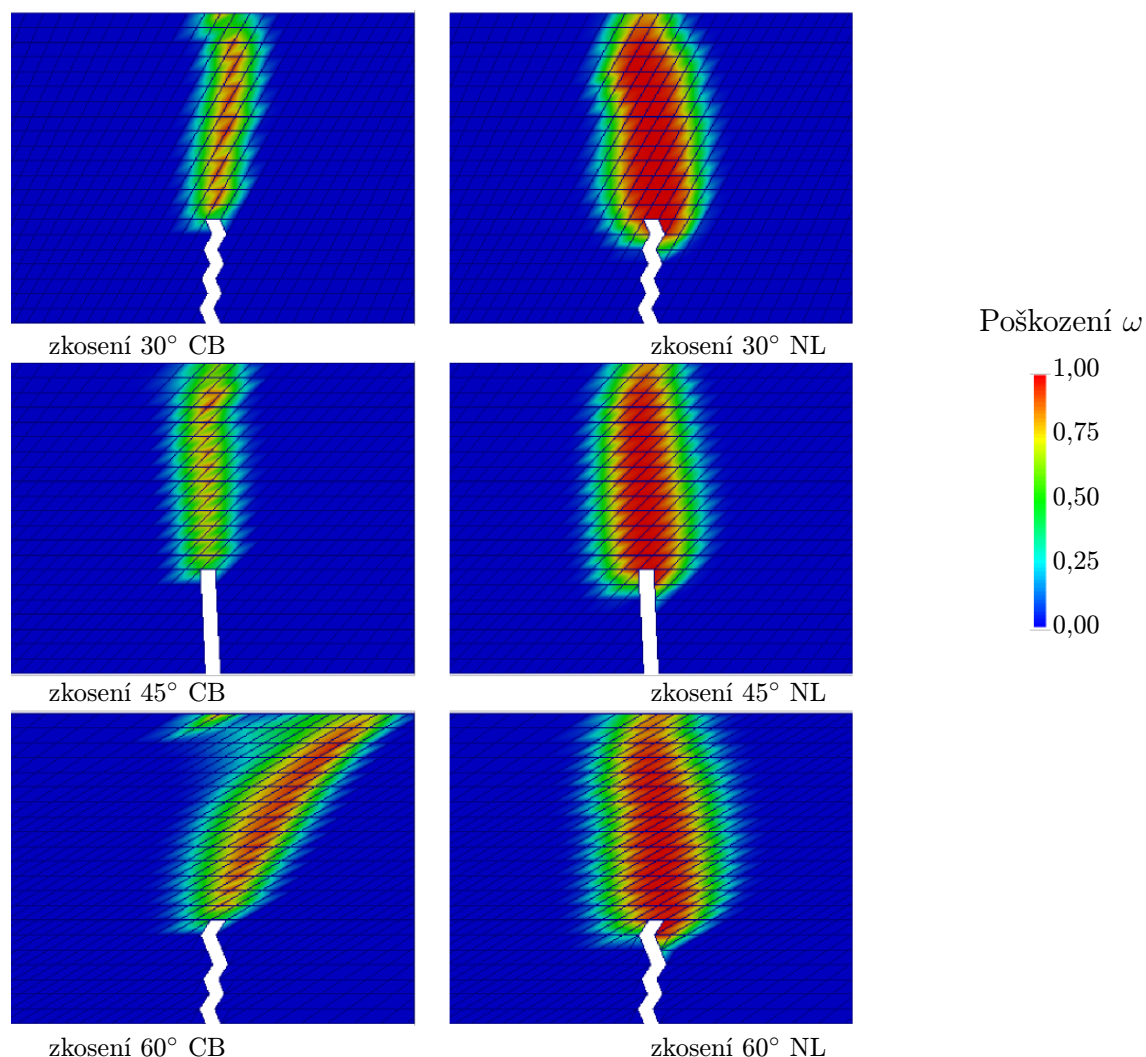
Začneme porovnávat od hrubé sítě, kde rozměr elementu je $h_b \approx 10$ mm (viz. 3.2). Pro tento případ se porušovaná oblast zdá přibližně stejně široká. Stojí za připomenutí, že rozsah váhové funkce pro nelokální model je právě $R = 10$ mm. Tento poloměr tedy zahrnuje pro nejhrubší síť maximálně jeden vedlejší prvek.

U výsledků pro tělesa bez zářezu si můžeme povšimnout, že u dolního líce se nachází širší oblast menšího poškození. Širší je proto, že porušení se nejprve odehrávalo ve více prvcích a až později se lokalizovalo do jednoho prvku. Ostatní porušené prvky poté odtěžovaly, nicméně hodnota porušení, které dosáhly, jim již zůstala.

U středně hrubé sítě již vidíme značnou odlišnost v šířce porušované oblasti, která je u jemné sítě naprosto zřejmá. Zatímco při použití nelokálního modelu se porušuje relativně široká oblast, při použití modelu pásu trhlín se porušení odehrává v jednom úzkém *pásmu trhlín*. Navíc je patrné, že pro nelokální model je šířka porušované oblasti téměř nezávislá na jemnosti dělení sítě.

Na dalších dvou obrázcích (7.8 a 7.9) jsou vykresleny hodnoty poškození na zkosených sítích. Jestliže u rovných sítí je rozdíl pouze co se týče šířky porušené zóny v závislosti na velikosti prvku, zde je situace jiná.

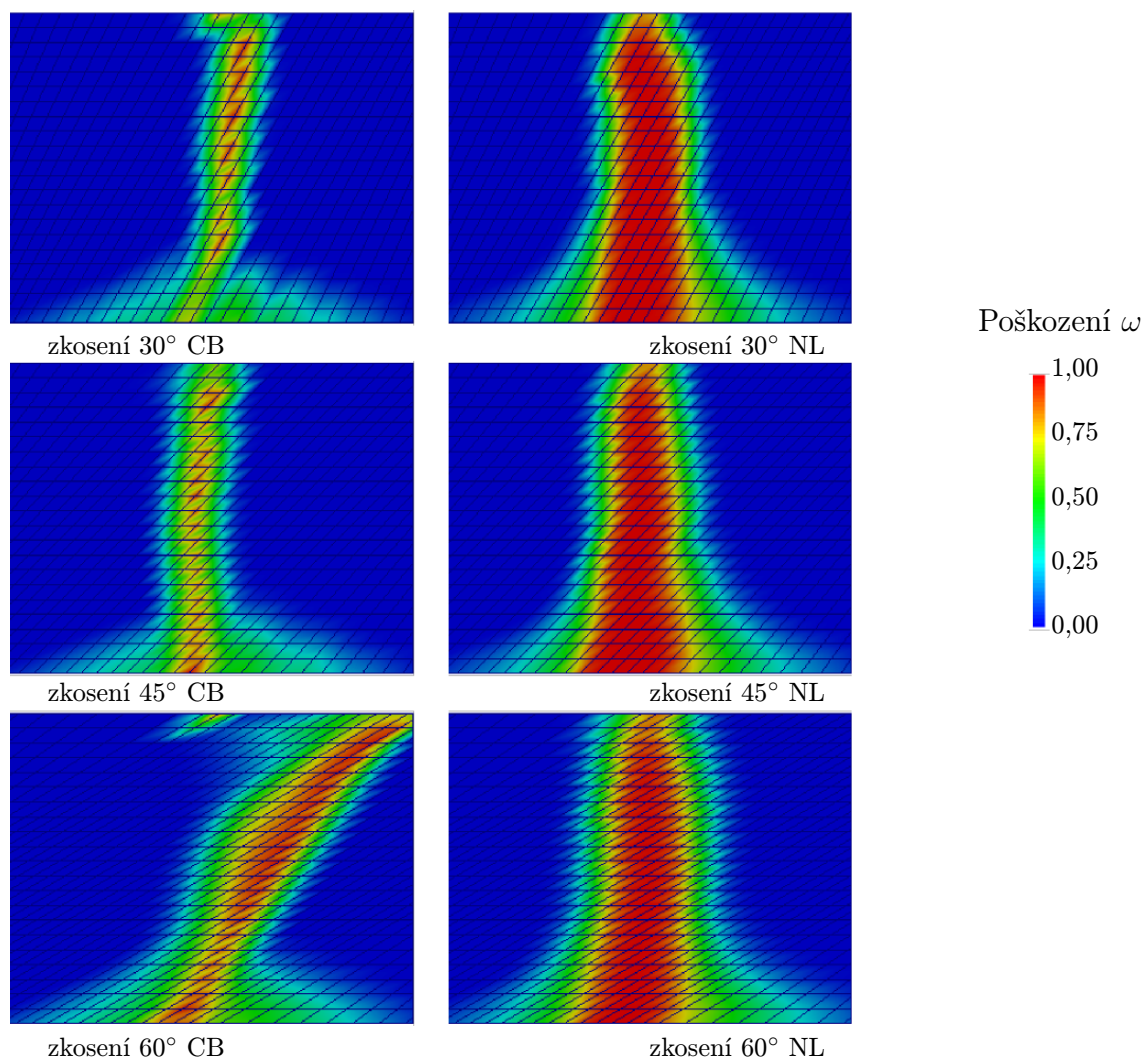
Vidět můžeme nejen různě široké oblasti, ve kterých jsou prvky poškozeny, ale u modelu pásu trhlín je trhlina dokonce nucena sledovat směr sítě. U hodnot zkosení do 45 stupňů se modelu daří tento fakt eliminovat. U sítě zkosené o 60 stupňů však



Obrázek 7.8: Porovnání oblasti poškození v posledním výpočtovém kroku na tělese se zářezem pro zkosené sítě konečných prvků; CB - hodnoty pro model pásu trhlín, NL - hodnoty pro nelokální model.

již nikoli. Dochází k naprostému úklonu trhliny ve směru sítě. Tento jev nastává jak v tělese se zářezem, tak v tělese bez zářezu. Chápeme ho jako velmi hrubou chybu, která může vést k nevhodnému návrhu konstrukce.

Opět stojí za povšimnutí, že při použití nelokálního přístupu jsou zóny porušení tvarově velmi podobné, a to nezávisle na hustotě či uklonění sítě.



Obrázek 7.9: Porovnání oblasti poškození v posledním výpočtovém kroku na tělese bez zářezu pro zkosené síť konečných prvků; CB - hodnoty pro model pásu trhlin, NL - hodnoty pro nelokální model.

Kapitola 8

Závěr

V této bakalářské práci jsem se zabýval modelem porušení betonového trámce v tříbodovém ohybu. V preprocesoru byla vytvořena geometrie modelu, včetně různých sítí konečných prvků pro těleso se zářezem i bez zářezu. Sítě se lišily v jemnosti dělení a také ve směrech hlavních linií. Vedle základních neukloněných sítí byly vytvořeny také sítě ukloněné o 30, 45 a 60 stupňů.

Nejprve bylo použito jednoduchého zákona porušení bez omezovače lokalizace za účelem demonstrování závislosti výsledků na velikosti konečných prvků. Bylo ukázáno, že porušení se během výpočtu lokalizuje do úzké oblasti, kdy trhlina probíhá pouze jedním pásem konečných prvků. Na modelu tříbodového ohybu pak je možno pozorovat závislost ve smyslu čím jemnější diskretizace, tím nižší únosnost.

Dále byl konstitutivní zákon vylepšen pomocí *modelu pásu trhlín*, který používá jako materiálovou konstantu hodnotu lomové energie G_f . Pomocí této konstanty je v konstitutivních zákonech upraveno poměrné přetvoření na sestupné větvi tak, aby eliminovalo nepříznivé důsledky lokalizace. Ukázalo se, že na neukloněných sítích dává tento přístup výsledky, které nejsou závislé na velikosti jednotlivých konečných prvků. V zatěžovacích křivkách jsou pouze nepatrné rozdíly.

Následně bylo použito *nelokálního modelu*. U tohoto přístupu je hodnota parametru poškození vypočtena z nelokálního poměrného přetvoření, a je tedy závislá na hodnotách přetvoření v okolních integračních bodech, které započítává přes tzv. váhovou funkci. Na našem modelu s neukloněnými sítěmi se ukázalo, že tento přístup není tak přesný jako model pásu trhlín. Rozdíly byly ovšem patrné až po dosažení maximálního zatížení, únosnost trámce byla tedy na síti nezávislá.

Ukloněné sítě byly vymodelovány pro vzájemné porovnání výpočtu pomocí *modelu pásu trhlín* a *nelokálního modelu*. Z porovnání zatěžovacích křivek vycházejí oba přístupy obdobně. Průběh zatěžovacích křivek vykazuje relativně přijatelné, i když rozdílné, výsledky pro uklonění do 45°. Na síti zkosené o 60° jsou výsledky již hodně odlišné.

Z porovnání tvaru trhlín vychází lépe *nelokální model*. Směr trhliny i velikost poškozené oblasti jsou na všech typech sítí téměř shodné. Oproti tomu u druhého z omezovačů je šířka poškozované oblasti závislá na velikosti konečných prvků, což

nevadí, jelikož *model pásu trhlín* tento fakt eliminuje jiným způsobem. Problém nastává až ve chvíli, kdy jej aplikujeme na ukloněnou síť. Směr trhliny pak může být závislý na orientaci sítě, což je patrné zejména na síti ukloněné o 60 stupňů.

8.1 Zhodnocení

Oba dva přístupy omezující lokalizaci, *model pásu trhlín* i *nelokální model*, se při našich simulacích ukázaly jako použitelné k omezení závislosti výpočtu na velikosti konečných prvků.

Pro různě ukloněné sítě se jeví jako přijatelnější *nelokální* formulace, zejména co se týče vystižení směru šíření trhliny. *Model pásu trhlín* má u sítě ukloněné o 60 stupňů silnou tendenci uklánět i trhlínu.

Literatura

- BAŽANT, Z. P., OH, B.-H. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures (RILEM, Paris)*, 16:155–177, 1983.
- BAŽANT, Z. P., PLANAS, J. *Fracture and size effect in concrete and other Quasibrittle materials*. Boca Raton, Florida: CRC press, 1998.
- JIRÁSEK, M. Nonlocal models for damage and fracture: comparison of approaches. *Solid Structures*, 35:4133–4145, 1998.
- JIRÁSEK, M., BAUER, M. Numerical aspects of the crack band approach. *Computers and Structures*, 19:60–78, 2012.
- JIRÁSEK, M., ROLSHOVEN, S. Localization properties of strain-softening gradient plasticity models. part I: Strain-gradient theories. *International Journal of Solids and Structures*, 46:2225–2238, 2009.
- JIRÁSEK, M., ZEMAN, J. *Přetváření a porušování materiálů*. Praha: České vysoké učení technické, 2006. ISBN 80-01-03555-7.
- OLIVER, J. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:461–474, 1989.
- PATZÁK, B. *Material Model Library Manual*. Czech Technical University, Prague, 2011.
- PATZÁK, B., BITTNAR, Z. Design of object oriented finite element code. *Advances in Engineering Software*, 32(10-11):759–767, 2001.
- PATZÁK, B., RYPL, D. Object-oriented, parallel finite element framework with dynamic load balancing. *Advances in Engineering Software*, 47(1):35–50, 2012.

Seznam symbolů

l	rozpětí; vzdálenost podpor trámce
s	celková délka trámce včetně přesahu za podpory
v	výška trámce
t	tloušťka trámce
F	zatěžovací síla
d	průhyb uprostřed rozpětí
E	Youngův modul pružnosti
f_t	pevnost v tahu
ν	součinitel příčné kontrakce
σ	vektor napětí
ε	vektor poměrných přetvoření
ε_0	hodnota poměrného přetvoření při dosažení meze pevnosti
ε_f	hodnota poměrného přetvoření určující sklon sestupné větve konstitutivního zákona
$\bar{\varepsilon}$	lokální ekvivalentní poměrné přetvoření
$\tilde{\varepsilon}$	nelokální ekvivalentní poměrné přetvoření
D	matice tuhosti prvku
ω	hodnota poškození
W_f	celková energie uvolněná při porušení prvku trhlinou
G_f	lomová energie; energie na jednotkovou plochu trhliny
A_f	plocha trhliny
h	délka strany konečného prvku
h_b	šířka pásu trhlín
A	plocha konečného prvku

α_0	váhová funkce
α	normalizovaná váhová funkce
s	vzdálenost mezi započítávaným a vyšetřovaným bodem
\boldsymbol{x}	souřadnice vyšetřovaného bodu
$\boldsymbol{\xi}$	souřadnice započítávaného bodu
R	parametr váhové funkce

Seznam obrázků

3.1	Ukázka části vstupního souboru Oofemu.	6
3.2	Ukázka zadávání geometrie v Salome.	6
3.3	Ukázka zadávání parametrů k vytvoření sítě konečných prvků v Salome.	6
3.4	Ukázka vykreslení vypočtených hodnot v prostředí Paraview.	7
3.5	Rozměry modelovaného prvku a jeho okrajové podmínky.	7
3.6	Sítě konečných prvků	8
4.1	Procesní zóna na čele trhliny.	12
4.2	Pracovní diagram pro kvazikřehké materiály se změkčením: (a) lineární, (b) bilineární a (c) exponenciální.	12
4.3	Dva pruty o stejných rozměrech namáhané tahem, rozdělené každý na jiný počet segmentů.	13
4.4	Lokalizace porušení do jednoho prvku.	14
4.5	Celkové protažení prutu je závislé na hustotě sítě konečných prvků	14
4.6	Závislost zatížení a posunu taženého prutu rozděleného na různý počet segmentů (bez použití omezovače lokalizace).	15
4.7	Ukázka závislosti výsledků modelu třibodového ohybu na hustotě sítě konečných prvků; těleso se zářezem.	15
4.8	Ukázka závislosti výsledků modelu třibodového ohybu na hustotě sítě konečných prvků; těleso bez zářezu.	16
5.1	(a) Globální pracovní diagram tělesa porušovaného trhlinou, (b) konstitutivní zákon pro model pásu trhlín.	18
5.2	Rozměry uvažovaného porušeného objemu.	18
5.3	Možnosti odhadu šířky pásu trhlín: (a) směr trhliny je shodný se směrem sítě, (b) trhlina ve směru diagonál čtvercové sítě, (c) obecný směr trhliny v pravidelné obdélníkové síti, (d) průřez prvku kolmo na směr maximálního hlavního napětí (n v obrázku značí směr maximálního hlavního napětí) (Jirásek a Bauer, 2012).	19
5.4	Pracovní diagram taženého prutu při použití modelu pásu trhlín. výsledky simulací	20

5.5	Zatěžovací křivky tělesa se zářezem při použití modelu pásu trhlin pro různě hrubé sítě.	21
5.6	Zatěžovací křivky tělesa bez zářezu při použití modelu pásu trhlin pro různě hrubé sítě.	21
6.1	Příklad použití normalizované váhové funkce.	24
6.2	Váhové funkce pro hodnotu $R = 10$; dobře patrný je důvod, proč se hodnota Gaussovy křivky pro $s > 2,5R$ uvažuje nulová.	25
6.3	Pracovní diagram taženého prutu při použití nelokálního modelu. . .	26
6.4	Přibližná shoda zatěžovacích křivek pro model pásu trhlin a nelokální model na středně hrubé síti.	27
6.5	Zatěžovací křivky tělesa se zářezem za použití nelokálního modelu pro různě hrubé sítě.	27
6.6	Zatěžovací křivky tělesa bez zářezu za použití nelokálního modelu pro různě hrubé sítě.	28
7.1	Porovnání všech zatěžovacích křivek pro model pásu trhlin (CB) a nelokální model (NL) na trámcih se zářezem v neukloněné síti. . . .	29
7.2	Zatěžovací křivky pro zkosené sítě na tělese se zářezem při použití modelu pásu trhlin.	30
7.3	Zatěžovací křivky pro zkosené sítě na tělese bez zářezu při použití modelu pásu trhlin.	30
7.4	Zatěžovací křivky pro zkosené sítě na tělese se zářezem při použití nelokálního modelu.	31
7.5	Zatěžovací křivky pro zkosené sítě na tělese bez zářezu při použití nelokálního modelu.	31
7.6	Porovnání oblasti poškození v posledním výpočtovém kroku na tělese se zářezem pro různě hrubé neukloněné sítě konečných prvků; CB - hodnoty pro model pásu trhlin, NL - hodnoty pro nelokální model. .	32
7.7	Porovnání rozsahu poškození v posledním výpočtovém kroku na tělese bez zářezu pro různě hrubé neukloněné sítě konečných prvků; CB - hodnoty pro model pásu trhlin, NL - hodnoty pro nelokální model. .	33
7.8	Porovnání oblasti poškození v posledním výpočtovém kroku na tělese se zářezem pro zkosené sítě konečných prvků; CB - hodnoty pro model pásu trhlin, NL - hodnoty pro nelokální model.	34
7.9	Porovnání oblasti poškození v posledním výpočtovém kroku na tělese bez zářezu pro zkosené sítě konečných prvků; CB - hodnoty pro model pásu trhlin, NL - hodnoty pro nelokální model.	35